



# الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة

سمحت إصلاحات المنظومة التربوية بإعادة الإعتبار إلى شهادة التعليم المتوسط إذا أصبحت ركيزة أساسية في الإنتقال إلى التعليم الثانوي كما أنها جاءت بنمط جديد من التقويم الذي يعتمد على المقاربة بالكفاءات، وفي هذا الإطار ومساهمة منا لرفع نسبة النجاح والحد من التسرب المدرسي، نضع بين أيدي تلاميذتنا المقبلين على إمتحان شهادة التعليم المتوسط، هذا الكتاب أملين أن يكون فضاءاً آخر في متناولهم يسمح لهم بالتحضير الجيد لمادة..... وتعزيز كفاءاتهم ومكتساباتهم العلمية.

ولقد حرصنا على تقديم مواد الكتاب بمنهجية تربوية بسيطة، في متناول للتلاميذ بحيث يجدون ملخصات لأهم المعارف المستهدفة المرفقة بسلسلة من التمارين وبعض وضعيات الإدماج التقويمية ومواضيع إمتحانات، مرفقة بحلولها.

في الأخير لا يسعنا إلا أن نشجع تلامذتنا على الجهد والمثابرة حتى يكون النجاح حليفهم.

المؤلف: تاويرت جمال

مفتش التربية و التكوين لمادة الرياضيات

## الفهرس

3	قواسم عدد طبيعي- القاسم المشترك الأكبر- الكسور غير القابلة للاختزال
4	تمارين
9	الحساب على الجذور
10	تمارين
15	حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
16	تمارين
23	المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
24	تمارين
27	جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
28	التمارين
33	الدالة الخطية – الدالة التآلفية
34	تمارين
44	الإحصاء
45	تمارين
48	خاصية طالس
49	تمارين
54	حساب المثلثات في المثلث القائم
55	تمارين
60	الأشعة والانسحاب
61	تمارين
63	المعالم
64	تمارين
65	الدوران – المضلعات المنتظمة – الزوايا
67	تمارين
70	الهندسة في الفضاء
71	تمارين
75	مواضيع مقترحة مع حلولها

# قواسم عدد طبيعي- القاسم المشترك الأكبر- الكسور غير القابلة للاختزال

# 1

أتذكر الأهم:

## 1. قاسم عدد طبيعي

**تعريف:**  $a, b$  عدنان طبيعيان حيث:  $b \neq 0$ .  
(  $b$  قاسم لـ  $a$  ) معناه ( يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث:  $a = k \times b$  )  
نقول أيضا أن  $a$  يقبل القسمة على  $b$  أو أن  $b$  يقسم  $a$  أو أن  $a$  مضاعف لـ  $b$ .

**مثال:** العدد 3 يقسم العدد 81 لأن  $81 = 27 \times 3$   
**ملاحظة:** العدد 1 يقسم كل الأعداد الطبيعية.

## 2. خواص قاسم عدد طبيعي

$a, b$  عدنان طبيعيان حيث:  $a > b$  و  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.  
**الخاصية 1:** إذا قسم  $n$  كلا من  $a$  و  $b$  فإنه يقسم كلا من  $(a+b)$  و  $(a-b)$ .  
**الخاصية 2:** إذا قسم  $n$  كلا من  $a$  و  $b$  فإنه يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$ .

## 3. القاسم المشترك الأكبر

**تعريف:** نسمي القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين أكبر قواسمهما المشتركة.

**مثال:** القواسم المشتركة للعددين 12 و 30 هي: 1، 2، 3 و 6 ومنه:  $PGCD(30;12) = 6$ .

**خاصية:** مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة قواسمهما المشترك الأكبر.

## 4. الكسور غير القابلة للاختزال

**تعريف 1:** ( $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما ) معناه (  $PGCD(a;b) = 1$  ).

**تعريف 2:** ( الكسر  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ) غير قابل للاختزال ) معناه ( $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما).

**مثال:** العدنان 25 و 26 أوليان فيما بينهما ومنه الكسر  $\frac{25}{26}$  غير قابل للاختزال.

## أدرب:

- التمرين 1: 1- حدد المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على 21.  
2- أكتب  $\frac{720}{1512}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

- التمرين 2: نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.  
1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.  
2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ برر.  
3. اجعل الكسر  $\frac{63}{105}$  غير قابل للاختزال.

- التمرين 3: نعتبر العددين 286 و 130.  
1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين  $PGCD(286;130)$ .  
2- ليكن الكسر  $A = \frac{286}{130}$ . أكتب  $A$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

## أنمي كفاءاتي:

- المسألة 1: يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.  
1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟  
2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟

- المسألة 2: نعتبر العددين 3073 و 1317.  
1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317.  
2. يشارك تلاميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073 تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة ( لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع بين البنات و الأولاد ) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.  
أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟  
ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق. ( عدد البنات و عدد الأولاد ) .

### المسألة 3:

- نعتبر العددين 540 و 300 .
1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 .
  2. نريد أن نفرش قاعة مستطيلة الشكل طولها 5,40 m و عرضها 3 m بزراعي مربعة الشكل و كلها متماثلة.
- ما هو طول كل زريبة حتى يكون عدد الزراعي المستعملة أصغر ما يمكن؟
  - عين حينئذ عدد الزراعي المستعملة.

### المسألة 4:

- يملك أحد هواة الطوابع البريدية 1631 طابعا جزائريا و 932 طابعا أجنبيا .  
يريد بيع كل طوابعه على شكل مجموعات متماثلة (لها نفس عدد الطوابع و نفس التوزيع بين الطوابع الجزائرية و الأجنبية) .
1. عين أكبر عدد من المجموعات التي يمكن تشكيلها.
  2. عين حينئذ عدد الطوابع الجزائرية و عدد الطوابع الأجنبية في كل مجموعة.

## حلول التمارين و المسائل

### حل التمرين 1

1.  $1512 = 21 \times 72 + 0$  . حاصل القسمة هو 72 بينما الباقي 0 .
2. لدينا:  $1512 = 21 \times 72$  و  $720 = 10 \times 72$  و بالتالي:  
 $\frac{720}{1512} = \frac{10 \times 72}{21 \times 72} = \frac{10}{21}$  . الكسر  $\frac{10}{21}$  غير قابل للاختزال.

### حل التمرين 2

1. قواسم العدد 63 هي: 1، 3، 7، 9، 21، 63 .  
قواسم العدد 105 هي: 1، 3، 5، 7، 15، 21، 35، 105 .
2. نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: 1، 3، 7، 21 .  
و بالتالي فإن:  
 $PGCD(105; 63) = 21$  . و بما أن  $PGCD(105; 63) \neq 1$  فإن العددين 105 و 63 ليسا أوليين فيما بينهما .
3. لدينا:  $105 = 21 \times 5$  و  $63 = 21 \times 3$  و منه:  $\frac{63}{105} = \frac{21 \times 3}{21 \times 5} = \frac{3}{5}$  .

الكسر  $\frac{3}{5}$  غير قابل للاختزال.

حل التمرين 3

	2	
286	130	26
	26	0

الحاصل ←

القاسم و المقسوم ←

الباقى ←

1.

$$286 = 130 \times 2 + 26$$

$$130 = 26 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم للقسمات الإقليدية المتتابعة هو 26

و بالتالي:  $PGCD(286;130) = 26$

2. حسب نتيجة السؤال الأول لدينا:  $286 = 26 \times 11$  و  $130 = 26 \times 5$  و منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر  $\frac{11}{5}$  غير قابل للاختزال.

حل المسألة 1

1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو:  $165 = 90 + 75$ . لدينا:  $165 : 5 = 33$  و بالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن:  $15 = 75 : 5$  و  $18 = 90 : 5$ .

في حين:  $165 : 6 = 27.5$

و بالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة (العدد 27.5 ليس عددا طبيعيا).

2. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال

كل الزهور بالرمز  $n$  فيجب أن يقسم  $n$  كلا من العددين 75 و 90 و بالتالي فإن  $n$

قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن  $n$  هو أكبر هذه القواسم.

إذن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلا

خوارزمية إقليدس  $PGCD(90, 75)$ .

$$90 = 75 \times 1 + 15$$

آخر باق غير معدوم هو 15 و منه:  $PGCD(90, 75) = 15$ .

$$75 = 15 \times 5 + 0$$

إذن أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15.

لدينا:  $75 : 15 = 5$  و  $90 : 15 = 6$  و بالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد

زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6.

نجد في كل باقة 11 زهرة.

1. لنحسب باستعمال مثلاً خوارزمية إقليدس (3073,1317) PGCD .

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } 3073 &= 1317 \times 2 + 439 \\ \text{آخر باق غير معدوم هو } 439 & \text{ ومنه:} \\ 1317 &= 439 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

$$PGCD(3073,1317) = 439$$

2. (ا) بما أن كل الفرق متماثلة و أن كل تلميذ سواء كان بنتاً أو ولداً ينتمي إلى إحدى الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلا من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317 .  
و بما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317 أي 439 . و بالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها هو 439 .

(ب) عدد البنات في كل فريق هو:  $3073 \div 439 = 7$  .

عدد الأولاد في كل فريق هو:  $1317 \div 439 = 3$  .

يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد .

1. لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 نستعمل مثلاً تقنية عمليات الطرح المتتابعة و التي تركز على القاعدة التالية:

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b) \text{ علماً أن: } a > b$$

$$PGCD(540;300) = PGCD(300;240) \text{ و منه: } 540 - 300 = 240$$

$$PGCD(540;300) = PGCD(240;60) \text{ و منه: } 300 - 240 = 60$$

$$PGCD(540;300) = PGCD(180;60) \text{ و منه: } 240 - 60 = 180$$

$$PGCD(540;300) = PGCD(120;60) \text{ و منه: } 180 - 60 = 120$$

$$PGCD(540;300) = PGCD(60;60) \text{ و منه: } 120 - 60 = 60$$

$$\text{و هكذا نجد أن: } PGCD(540;300) = 60$$

2. • طول القاعدة هو 540cm و عرضها 300cm. لتفريش القاعدة و بدون استعمال أجزاء من زرابي يجب أن يكون ضلع الزربية قاسماً لكل من العددين 540 و 300 و ليكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن يجب أن تكون الزرابي أكبر ما يمكن و بالتالي يجب أن يكون ضلع الزربية القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 . و هكذا فإن طول ضلع كل زربية هو: 60cm .

• عدد الزرابي على طول القاعدة هو:  $540 \div 60 = 9$  بينما عددها على عرض

القاعدة هو:  $300 \div 60 = 5$  . و بالتالي فعدد الزرابي المطلوب هو:  $9 \times 5 = 45$  .

1. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من المجموعات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الطوابع بالرمز  $n$  فيجب أن يقسم  $n$  كل 1631 و 932 و بالتالي فإن  $n$  قاسم مشترك للعددين 1631 و 932 و بالإضافة إلى ذلك فإن  $n$  هو أكبر هذه القواسم. إذن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932. باستعمال خوارزمية إقليدس يكون:

$$1631 = 932 \times 1 + 699$$

$$\text{لدينا: } 962 = 699 \times 1 = 233 \text{ و منه: } PGCD(1631; 932) = 233$$

$$699 = 233 \times 3 + 0$$

و بالتالي فإن أكبر عدد للمجموعات التي يمكن للهاوي تشكيلها هو: 233.

$$2. \text{ لدينا: } 1631 \div 233 = 7 \text{ و } 932 \div 233 = 4$$

في كل مجموعة يوجد إذن 7 طوابع جزائرية و 4 طوابع أجنبية.

نصيحة

نظم جدولاً للمذاكرة



أتذكر الأهم:

## 5. الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف: الجذر التربيعي للعدد الموجب  $a$  هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي  $a$

و نرسم له بالرمز  $\sqrt{a}$ . لدينا:  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

مثال:  $\sqrt{2}$  هو الجذر التربيعي للعدد 2. لدينا:  $(\sqrt{2})^2 = 2$ .

## 6. المعادلة من الشكل $x^2 = a$

- إذا كان  $a < 0$  فإن المعادلة  $x^2 = a$  لا تقبل حولا .
  - إذا كان  $a = 0$  فإن المعادلة  $x^2 = 0$  تقبل حلا وحيدا و هو 0.
  - إذا كان  $a > 0$  فإن المعادلة  $x^2 = a$  تقبل حلين و هما  $-\sqrt{a}$  و  $\sqrt{a}$ .
- مثال: للمعادلة  $x^2 = 3$  حلان هما  $-\sqrt{3}$  و  $\sqrt{3}$ .

## 7. خواص

الخاصية 1: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين فإن:  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ .

الخاصية 2: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين حيث  $b \neq 0$  فإن:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

الخاصية 3: إذا كان  $a$  عددا موجبا فإن:  $\sqrt{a^2} = a$ .

الخاصية 4: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين فإن:  $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ .

أمثلة:  $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{36} = 6$ ،  $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ .

ملاحظة: إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين غير معدومين حيث  $b < a$  فإن:

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{و} \quad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

مثال: لدينا من جهة  $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$  و لدينا من جهة ثانية  $4+3=7$  و  $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3=7$

و بالتالي:  $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

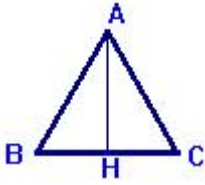
لدينا من جهة  $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$  و لدينا من جهة ثانية  $10-6=4$  و  $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10-6=4$

و بالتالي:  $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

## تمارين ومسائل

### أدرب:

التمرين 1: علما أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي  $18,49 m^2$  عين بالمتر طول ضلعها.



التمرين 2: مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة  $H$  منتصف القطعة  $[BC]$ .

1. أحسب الطول  $AH$  إذا علمت أن  $BC = 7cm$ .
2. أحسب الطول  $AH$  إذا علمت أن  $BC = a cm$ .

### التمرين 3:

نعتبر العددين  $A$  و  $B$  بحيث:

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80} \quad \text{و} \quad B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

1. أكتب العددين  $A$  و  $B$  على الشكل  $a + b\sqrt{5}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين.
2. عين القيمة المدورة إلى  $10^{-2}$  للعدد  $A$ .
3. أحسب قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  بالنقصان للعدد  $B$ .

### أنمي كفاءاتي:

المسألة 1: نهدف إلى إثبات أن العدد  $\sqrt{2}$  ليس عددا ناطقا. إذا كان  $\sqrt{2}$  عددا ناطقا فإنه

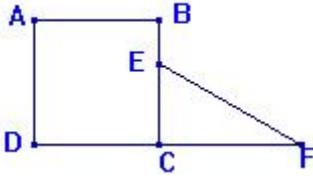
يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال  $\frac{p}{q}$  حيث  $p$  و  $q$  عدنان طبيعيين

غير معدومين.

1. تحقق أن  $p^2 = 2q^2$  ثم استنتج أن  $p^2$  عدد زوجي.
2. بين انه إذا كان  $p$  زوجيا يكون  $p^2$  زوجيا و إذا كان  $p$  فرديا يكون  $p^2$  فرديا ثم استنتج أن العدد  $p$  زوجي.
3. بوضع  $p = 2p'$  و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد  $q$  زوجي.

4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن  $\sqrt{2}$  ليس عددا ناطقا.

**المسألة 2:**  $ABCD$  مربع طول ضلعه  $x$  cm . مثلث قائم في النقطة  $C$  . النقطة  $E$  نقطة من القطعة المستقيمة  $[BC]$  و  $FC = 4$  cm .



1. عبر عن  $A$  مساحة  $ABCD$  بواسطة  $x$  ثم أحسب

$A$  من أجل  $x = 2 + \sqrt{2}$  .

2. \* نفرض  $x \geq 1$  و  $BE = 0,5$  cm .

احسب  $A'$  مساحة المثلث.

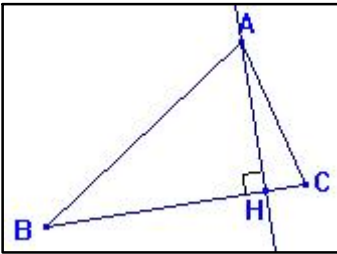
$ECF$  بواسطة  $x$  .

\* نضع  $S = A + A'$  . أحسب  $S$  بواسطة  $x$  ثم تحقق أن:  $S = x^2 + 2x - 1$  .

\* أحسب  $S$  من أجل  $x = 2 + \sqrt{2}$  . تعطى النتيجة على الشكل  $a + b\sqrt{2}$  .

**المسألة 3:**  $ABC$  مثلث و  $H$  المسقط العمودي لـ  $A$  على  $(BC)$

حيث:  $BH = 9\sqrt{3}$  ،  $HC = 5\sqrt{3}$  و  $AH = 12\sqrt{3}$  .



1. بين أن:  $AB = 15\sqrt{3}$  و أن:  $AC = 13\sqrt{3}$  .

2. أحسب  $P$  محيط المثلث  $ABC$  .

3. أحسب  $S$  مساحة المثلث  $ABC$  .

4. هل المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$  ؟ علل.

## حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

إذا رمزنا إلى طول ضلع القاعدة بالرمز  $x$  يكون لدينا:  $x^2 = 18,49$  لأن

مساحة المربع هي  $x^2$  . للمعادلة  $x^2 = 18,49$  حلان هما  $4,3$  و  $-4,3$  . و

علما أن الأطوال أعداد موجبة

فإن  $x = 4,3$  . و هكذا طول ضلع القاعدة المربعة الشكل هو  $4,3$  m .

حل التمرين 2

المثلث  $AHC$  قائم في النقطة  $H$ . لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \text{ و منه: } AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$HC^2 = \frac{BC^2}{4} \text{ بما أن } H \text{ منتصف } [BC] \text{ فإن: } HC = \frac{BC}{2} \text{ و بالتالي: } AH^2 = \frac{3BC^2}{4}$$

$$\text{و علما أن: } AC = BC \text{ فإن: } AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4} \text{ أي: } AH^2 = \frac{3BC^2}{4}$$

$$1. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times 7^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times 7^2}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times a^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

حل التمرين 3

1.

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

$$A = 5 + \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5}$$

و

$$A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

$$B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

$$B = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 - ((\sqrt{5})^2 - 1)$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على:  $A = 18,41640\dots$

إذن 18,42 هي القيمة المدورة إلى  $10^{-2}$  للعدد  $A$  لأن  $6 \geq 5$ .

3. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على:  $B = 13,94427\dots$

إذن 13,94 قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  بالنقصان للعدد  $B$ .

حل المسألة 1

1. بوضع:  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$  يكون لدينا:  $\frac{p^2}{q^2} = 2$  و منه:  $p^2 = 2q^2$ . بما أن  $p^2$

يكتب على الشكل:  $2k$  فإن  $p^2$  عدد زوجي.

2. \*نفرض أن  $p$  زوجي و منه:  $p = 2k$  حيث  $k$  عدد طبيعي و بالتالي:  $p^2 = 4k^2$

و هكذا  $p^2 = 2(2k^2) = 2k'$  مع  $k' = 2k^2$ . إذن:  $p^2$  عدد زوجي.

\* نفرض أن  $p$  فرديا و منه:  $p = 2k + 1$  حيث  $k$  عدد طبيعي

$$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

و هكذا  $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$  مع  $k' = 2k^2 + 2k$ . إذن:  $p^2$  عدد فردي.

و منه لو كان  $p$  عددا فرديا لكان  $p^2$  عددا فرديا و بما أن  $p^2$  زوجي فإن  $p$  زوجي.

3. بما أن  $p$  زوجي نضع  $p = 2p'$  و منه:  $p^2 = 4p'^2$  و بعد التعويض في العلاقة:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$$

و باستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد  $q$  زوجي لأنه في نفس وضعية  $p$ .

4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددين  $p$  و  $q$  زوجيان و بالتالي فإن العدد 2

قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر  $\frac{p}{q}$  غير قابل للاختزال و هذا مناقض للفرضية "  $\frac{p}{q}$

كسر غير قابل للاختزال " إذن  $\sqrt{2}$  ليس عددا ناطقا.

### حل المسألة 2

$$1. A = x^2 \text{ من أجل } x = 2 + \sqrt{2} \text{ لدينا: } A = (2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$2. A' = \frac{CF \times CE}{2} = \frac{4 \times (x - 0,5)}{2} = 2(x - 0,5)$$

$$A' = 2x - 1$$

$$* \text{ لدينا: } S = x^2 + (2x - 1) \text{ و منه: } S = x^2 + 2x - 1$$

$$S = (2 + \sqrt{2})^2 + 2(2 + \sqrt{2}) - 1 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 2\sqrt{2} - 1$$

$$\text{و منه: } S = 9 + 6\sqrt{2}$$

### حل المسألة 3

1. \* بما أن المثلث  $ABH$  قائم في النقطة  $H$  يكون لدينا حسب مبرهنة

$$\text{فيثاغورس: } AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$AB^2 = (9\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 9^2 \times 3 + 12^2 \times 3$$

و منه:  $AB^2 = 225 \times 3 = 15^2 \times 3$  و بالتالي:  $AB = \sqrt{15^2 \times 3}$  أي:  $AB = 15\sqrt{3}$

\* بما أن المثلث  $ACH$  قائم في النقطة  $H$  يكون لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس:

$$AC^2 = HC^2 + AH^2 \text{ أي: } AC^2 = (5\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 5^2 \times 3 + 12^2 \times 3$$

و منه:  $AC^2 = 169 \times 3 = 13^2 \times 3$  و بالتالي:  $AC = \sqrt{13^2 \times 3}$  أي:  $AC = 13\sqrt{3}$

2. لدينا:  $BC = BH + HC$  و بالتالي:  $BC = 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

نعلم أن:  $P = AB + BC + CA$  و منه:  $P = 15\sqrt{3} + 21\sqrt{3} + 13\sqrt{3}$

و هكذا نجد أن:  $P = 49\sqrt{3}$

3. مساحة المثلث  $ABC$  هي:  $S = \frac{BC \times AH}{2}$  و بالتالي:

$$S = 378 \text{ و هكذا نجد أن: } S = \frac{21\sqrt{3} \times 12\sqrt{3}}{2} = 21 \times 6 \times (\sqrt{3})^2$$

4. لدينا من جهة:  $BC^2 = (21\sqrt{3})^2 = 1323$  و لدينا من جهة ثانية:

$$AB^2 + AC^2 = 15^2 \times 3 + 13^2 \times 3 = 1182$$

نلاحظ أن:  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$  و بالتالي فالمثلث  $ABC$  ليس قائما في النقطة  $A$ .

نصيحة

أحسن استغلال وقتك  
واجعل وقتا للجد و الاجتهاد  
ووقتا للعب و المرح.

## حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

# 3

أتذكر الأهم:

### 8. المتطابقات الشهيرة

تعريف: من أجل كل عددين  $a$  و  $b$  تسمى المساويات الآتية متطابقات شهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

أمثلة:  $(1-x)^2 = 1-2x+x^2$  ،  $(x+\sqrt{2})^2 = x^2+2\sqrt{2}x+2$  ،

$$x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

### 9. النشر و التحليل

\* تحليل عبارة جبرية يعني كتابتها على شكل جداء و يتم ذلك إما باستعمال العامل المشترك أو باستعمال المتطابقات الشهيرة.  
\* نشر و تبسيط عبارة جبرية يعني إجراء مختلف العمليات قصد تبسيطها و كتابتها على شكل خطي.

مثال: \* نشر و تبسيط العبارة  $(x+2)^2-3(x-1)$  يعطي:  $x^2+x+7$

\* تحليل العبارة  $(x+2)^2+(x+2)(x-1)$  يعطي:  $(x+2)(2x+1)$

### 10. معادلة جداء (معدوم)

تعريف: تسمى كل معادلة من الشكل:  $(ax+b)(cx+d)=0$  حيث:  $a, b, c, d$

أعداد حقيقية معلومة مع  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  معادلة جداء (معدوم) و يؤول حلها إلى حل المعادلتين:  $ax+b=0$  و  $cx+d=0$ .

لدينا:  $(ax+b)(cx+d)=0$  يعني  $ax+b=0$  أو  $cx+d=0$ .

مثال: نعتبر المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية:  $(x+1)(2x-3)=0$ .

$(x+1)(2x-3)=0$  يعني أن:  $x+1=0$  أو  $2x-3=0$  أي:  $x=-1$  أو  $x=\frac{3}{2}$ .

و هكذا فإن للمعادلة:  $(x + 1)(2x - 3) = 0$  حلان هما:  $-1$  و  $\frac{3}{2}$ .

## تمارين ومسائل

### أدرب:

**التمرين 1:** نعتبر العبارة الجبرية:  $A = (3x - 5)^2 - (2x - 1)(3x - 5)$ .

1. انشر و بسط العبارة  $A$ .

2. حلل العبارة  $A$ .

3. احسب قيمة  $A$  من اجل  $x = \frac{5}{3}$  ثم من اجل  $x = \sqrt{3}$ .

**التمرين 2:** نعتبر العبارة الجبرية:  $E = (2x + 3)^2 - 3(2x + 3)$ .

1. انشر و بسط العبارة  $E$ .

2. حلل العبارة  $E$  ثم احسب قيمة  $E$  من اجل  $x = -2$  ثم من اجل  $x = 0$ .

3. حل المعادلة:  $E = 0$ .

**التمرين 3:** نعتبر العبارة الجبرية:  $F = (x - 4)(2x + 1) - (x^2 - 16)$ .

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة  $F$ .

2. حلل العبارة  $F$  بعد ملاحظة وجود متطابقة شهيرة.

3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحل المعادلتين:  $F = 0$  و  $F = 12$ .

**التمرين 4:** نعتبر العبارة الجبرية:  $G = (x^2 - 9) - 2(x - 3)$ .

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة  $G$ .

2. حلل العبارة  $G$ .

3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحساب قيمة  $G$  من اجل  $x = -1$  ثم

من أجل  $x = 0$

حل المعادلة:  $(x - 3)(x + 1) = 0$ .

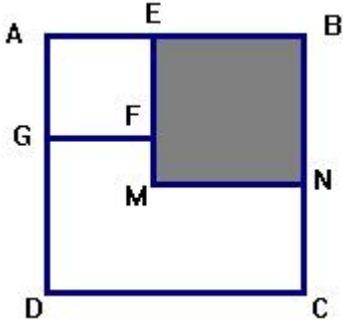
**التمرين 5:** عمر أحمد حالياً هو 11 سنة بينما عمر فؤاد هو 26 سنة.

بعد كم سنة يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد؟



## أنمي كفاءاتي:

### المسألة 1:



1. حلل العبارات الجبرية التالية:

$$I = (x + 7)^2 - 36$$

$$J = 4x^2 + 8x + 4$$

$$K = (x + 13)(x + 1) - 4(x + 1)^2$$

2. في الشكل المقابل  $AEFG$  مربع

$$\text{حيث: } AE = x + 1$$

$EBNM$  مربع طول ضلعه 6 و  $DG = 6$ .

\* عبر بواسطة  $x$  عن مساحة الجزء غير

المظلل في الشكل.

\* من أجل أي قيمة لـ  $x$  تكون المساحة  $S$  مساوية أربع مرات مساحة

المربع  $AEFG$ ؟

### المسألة 2:

1. أنشر ثم بسط العبارة:  $P = (x + 12)(x + 2)$ .

2. حلل العبارة:  $Q = (x + 7)^2 - 25$ .

3.  $x$  عدد موجب.  $ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$  بحيث:  $AB = 5$

$$\text{و } BC = x + 7$$

$$\text{أثبت أن: } AC^2 = x^2 + 14x + 24$$

4. عين قيمة العدد  $x$  التي يكون من أجلها:  $AC^2 = 15(x + 2)$ .

### المسألة 3:

1. تحقق أن المثلث، الذي أطواله الأعداد الطبيعية المتتالية 3، 4 و 5، مثلث قائم.

2. نريد معرفة ما إذا كانت توجد مثلثات أخرى أطوالها أعداد طبيعية

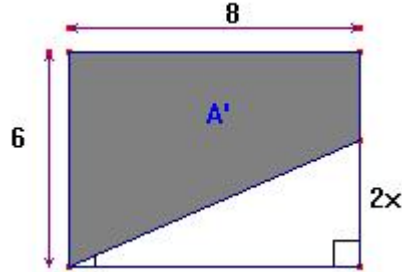
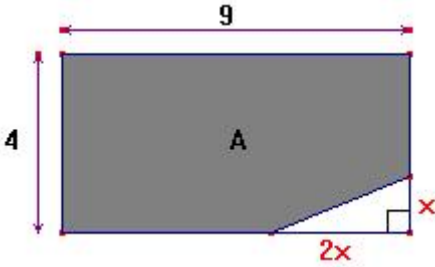
متتالية.

نفرض وجود مثلث يحقق ذلك و نرسم إلى طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة بالرمز  $x$ .

\* عبر بواسطة  $x$  عن طولي كل من أصغر ضلعي الزاوية القائمة و الوتر.

\* عين قيمة  $x$ . ماذا تستنتج؟

المسألة 4:



1. عبر عن المساحة المظلة  $A$

بواسطة  $x$ . حل العبارة المحصل عليها.

2. عبر عن المساحة المظلة  $A'$  بواسطة  $x$ . حل العبارة المحصل عليها.

3. عين قيم  $x$  التي تكون من أجلها المساحتان  $A$  و  $A'$  متساويتين.

حلول التمارين و المسائل

1. حل التمرين 1

$$A = (9x^2 - 30x + 25) - (6x^2 - 10x - 3x + 5)$$

$$A = 9x^2 - 30x + 25 - 6x^2 + 10x + 3x - 5$$

$$A = 3x^2 - 17x + 20$$

2.

$$A = (3x - 5)[(3x - 5) - (2x - 1)]$$

$$A = (3x - 5)(3x - 5 - 2x + 1)$$

$$A = (3x - 5)(x - 4)$$

3. \* من اجل  $x = \frac{5}{3}$  لدينا:  $\left(\frac{5}{3} - 4\right) \left(3 \times \frac{5}{3} - 5\right)$  و منه:  $A = 0$ .

\* من اجل  $x = \sqrt{3}$  لدينا:  $A = 3(\sqrt{3})^2 - 17\sqrt{3} + 20$  و منه:  $A = 29 - 17\sqrt{3}$ .

حل التمرين 2

1.

$$(2x + 3)^2 - 3(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9 - 6x - 9 = 4x^2 + 6x$$

وهكذا نجد أن:  $E = 4x^2 + 6x$

2. في هذه الحالة يمكن تحليل العبارة  $E$  باستعمال عامل مشترك.  
لدينا:  $E = 4x^2 + 6x = 2x(2x + 3)$  وإذا استعملنا العبارة الأولى يكون لدينا:

$$. E = (2x + 3)^2 - 3(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 3 - 3) = (2x + 3)2x$$

و هكذا نجد أن:  $E = 2x(2x + 3)$

من أجل  $x = -2$  لدينا:  $E = 2(-2)[2(-2) + 3] = 4$

$E = 0$  يعني  $0 = 2x(2x + 3)$  أي:  $2x = 0$  أو  $2x + 3 = 0$  وهذا يعني أن:

$$. x = 0 \text{ أو } x = -\frac{3}{2} \text{ حلا للمعادلة } E = 0 \text{ هما إذن: } 0 \text{ و } -\frac{3}{2}.$$

### حل التمرين 3

1.

$$F = (x - 4)(2x + 1) - (x^2 - 16) = 2x^2 + x - 8x - 4 - x^2 + 16$$

و هكذا نجد أن:  $F = x^2 - 7x + 12$

$$. F = (x - 4)(2x + 1) - (x^2 - 16) = (x - 4)(2x + 1) - (x - 4)(x + 4).$$

ومنه:  $F = (x - 4)[(2x + 1) - (x + 4)] = (x - 4)(2x + 1 - x - 4)$

و هكذا نجد أن:  $F = (x - 4)(x - 3)$

$$. 3. * \text{ لحل المعادلة } F = 0 \text{ نختار العبارة: } F = (x - 4)(x - 3)$$

و هكذا فإن  $F = 0$  يعني  $0 = (x - 4)(x - 3)$  أي:  $x - 4 = 0$  أو  $x - 3 = 0$

و هذا يعني أن:  $x = 4$  أو  $x = 3$ .

إذن للمعادلة  $F = 0$  حلان هما 3 و 4.

$$. * \text{ لحل المعادلة } F = 12 \text{ نختار العبارة: } F = x^2 - 7x + 12$$

و هكذا فإن  $F = 12$  يعني  $12 = x^2 - 7x + 12$  أي:  $x^2 - 7x = 0$

نلاحظ أن:  $x^2 - 7x = x(x - 7)$  وبالتالي فإن:  $F = 12$  يعني  $0 = x(x - 7)$

أي:  $x = 0$  أو  $x = 7$ .

إذن للمعادلة  $F = 12$  حلان هما: 0 و 7.

### حل التمرين 4

1.

$$G = (x^2 - 9) - 2(x - 3) = x^2 - 9 - 2x + 6 = x^2 - 2x - 3$$

و هكذا نجد أن:  $G = x^2 - 2x - 3$

2.  $G = (x^2 - 9) - 2(x - 3) = (x - 3)(x + 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x + 3 - 2)$  وهكذا نجد أن:  $G = (x - 3)(x + 1)$ .

3. \* لحساب قيمة  $G$  من أجل  $x = -1$  العبارة الأنسب هي:  $G = (x - 3)(x + 1)$ .

فتعويض  $x$  في العبارة بالعدد  $-1$  نتحصل بشكل مباشر على:  $G = 0$ .

\* لحساب قيمة  $G$  من أجل  $x = 0$  العبارة الأنسب هي:  $G = x^2 - 2x - 3$ .

فتعويض  $x$  في العبارة بالعدد  $0$  نتحصل بشكل مباشر على:  $G = -3$ .

4.  $(x - 3)(x + 1) = 0$  يعني:  $x - 3 = 0$  أو  $x + 1 = 0$  أي:  $x = 3$  أو  $x = -1$  للمعادلة  $(x - 3)(x + 1) = 0$  حلان هما:  $-1$  و  $3$ .

### حل التمرين 5

إذا رمزنا بالرمز  $x$  إلى عدد السنوات التي يصبح بعدها عمر فؤاد ضعف عمر احمد يكون حينئذ عمر فؤاد هو  $26 + x$  و يكون عمر أحمد هو  $11 + x$ .

لدينا إذن:  $2(11 + x) = 26 + x$  و هذا يعني أن:  $22 + 2x = 26 + x$

أي:  $2x - x = 26 - 22$  نجد هكذا:  $x = 4$ . و بالتالي يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد بعد 4 سنوات. يكون عمر أحمد 15 سنة و يكون عمر فؤاد 30 سنة.

### حل المسألة 1

1.  $I = (x + 7)^2 - 36 = (x + 7 - 6)(x + 7 + 6) = (x + 1)(x + 13)$

$J = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x + 1)^2$

$K = (x + 13)(x + 1) - 4(x + 1)^2 = (x + 1)[(x + 13) - 4(x + 1)]$

$K = (x + 1)(x + 13 - 4x - 4) = (x + 1)(9 - 3x)$

2. \* من الواضح أن  $ABCD$  مربع طول ضلعه  $6 + (x + 1)$  أي:  $x + 7$  و بالتالي

فمساحته هي:  $(x + 7)^2$ . من جهة ثانية مساحة المربع المظلل هي:  $36$

و بالتالي يكون لدينا:  $S = (x + 7)^2 - 36$ .

3 \* مساحة المربع  $A EFG$  هي:  $S' = (x + 1)^2$ . لنعين  $x$  بحيث يكون:  $S = 4S'$

$S = 4S'$  يعني  $(x + 7)^2 - 36 = 4(x + 1)^2$  أي و بعد ملاحظة أن  $S = I$ :

$(x + 1)(x + 13) - 4(x + 1)^2 = 0$  و هذا يعني أن:

$(x + 1)(9 - 3x) = 0$  أي:  $x + 1 = 0$  أو  $9 - 3x = 0$ . نجد هكذا:  $x = -1$  أو  $x = 3$

و بما أن  $x$  عدد موجب نأخذ هكذا  $x = 3$ .

$$. P = (x + 12)(x + 2) = x^2 + 2x + 12x + 24 = x^2 + 14x + 24 \quad 1$$

$$. Q = (x + 7)^2 - 25 = (x + 7 - 5)(x + 7 + 5) = (x + 2)(x + 12) \quad 2$$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم  $ABC$  يكون لدينا:

$$. AC^2 = (x + 7)^2 - 25 \text{ و } AC^2 = BC^2 - AB^2 \text{ أي: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

نلاحظ أن:  $AC^2 = Q$  و أن:  $Q = P$  و بالتالي:  $AC^2 = x^2 + 14x + 24$ .

$$. 5 \text{ بما أن: } AC^2 = (x + 12)(x + 2) \text{ فإن: } AC^2 = 15(x + 2) \text{ يعني أن:}$$

$$(x + 12)(x + 2) - 15(x + 2) = 0 \text{ أي: } (x + 12)(x + 2) = 15(x + 2)$$

و منه:  $(x + 2)(x - 3) = 0$  أي:  $x = -2$  أو  $x = 3$  و بما أن  $x \geq 0$  فإن:  $x = 3$ .

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ لدينا: } 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ و } 5^2 = 25 \text{ و منه: } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

و هكذا حسب عكس مبرهنة فيثاغورس فإن المثلث قائم.

2. \* بما أن أطوال هذا المثلث هي أعداد طبيعية متتالية و علما أن طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة هو  $x$  فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $(x - 1)$  بينما طول الوتر هو  $(x + 1)$ .

\* بما أن المثلث قائم يكون لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس:

$$(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 \text{ أي: } x^2 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1 \text{ و بالتالي:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ أي: } x^2 - 4x = 0 \text{ و هذا يعني أن:}$$

$$x(x - 4) = 0 \text{ أي: } x = 0 \text{ أو } x = 4.$$

القيمة  $x = 0$  غير مناسبة لأن في هذه الحالة يكون طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $-1 = 0 - 1$  و نعلم أن الأطوال أعداد موجبة دائما. الحل الوحيد هو إذن:  $x = 4$  و في هذه الحالة فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو  $3 = 4 - 1$  بينما طول الوتر هو  $5 = 4 + 1$ .

نستنتج أن المثلث الوحيد الذي يجيب على السؤال هو المثلث المعروف في السؤال الأول.

1. مساحة المستطيل في الشكل الثاني هي:  $36 = 9 \times 4$  و مساحة المثلث

غير المظلل هي:  $x^2 = \frac{(2x) \cdot x}{2}$  و بالتالي فمساحة الشكل المظلل

$$\text{هي: } A = 36 - x^2$$

$$\text{لدينا: } A = (6 - x)(6 + x)$$

2. مساحة المستطيل في الشكل الأول هي:  $8 \times 6 = 48$  و مساحة المثلث غير المظلل

هي:  $8x = \frac{8 \times (2x)}{2}$  و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي:  $A' = 48 - 8x$

لدينا:  $A' = 8(6 - x)$

3.  $A = A'$  يعني أن:

$$(6-x)(6+x) - 8(6-x) = 0 \text{ أي } (6-x)(6+x) = 8(6-x)$$

$$\text{نتحصل على: } (6-x)[(6+x) - 8] = 0 \text{ أي: } (6-x)(x-2) = 0$$

و هذا يعني:  $6-x = 0$  أو  $x-2 = 0$  أي:  $x = 6$  أو  $x = 2$ .

نلاحظ من الشكل أن العدد  $x$  يجب أن يكون اصغر من 3 و إلا لكان  $2x > 6$   
تكون المساحتان  $A$  و  $A'$  متساويتين من أجل  $x = 2$ .

### تمارين إضافية

**التمرين 1:** نعتبر العبارة الجبرية:  $E = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(4x - 5)$ .

1. انشر ثم بسط العبارة  $E$ .

2. حل العبارة  $E$ .

3. احسب قيمة  $E$  من أجل  $x = \sqrt{5}$ . تعطى النتيجة على الشكل  $a + b\sqrt{5}$ .

4. حل المعادلة:  $E = 0$ .

**التمرين 2:** نعتبر العبارتين الجبريتين:  $A = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(-x - 3)$

$$\text{و } B = 2x^2 - 9x + 4$$

1. حل العبارة  $A$ .

2. بين أن:  $A = B$ .

3. احسب قيمة  $A$  من أجل  $x = \frac{2}{3}$ . تعطى النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

4. حل المعادلة:  $(2x - 1)(x - 4) = 0$ .

أ تذكر الأهم:

### 11. المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

**تعريف:** المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هي متباينات تكتب بعد تحويلها على أحد الأشكال الآتية:  $ax > b$  ،  $ax \leq b$  ،  $ax \geq b$  ، حيث:  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان و  $x$  المجهول.

**أمثلة:**

- \* المتراجحة  $2x < -1$  هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
- \* المتراجحة  $-3x - 2 \geq 0$  هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد لأنه يمكن كتابتها على الشكل:  $-3x \geq 2$ .

### 12. حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- \* حل متراجحة يعني إيجاد كل الأعداد  $x$  التي تحقق المتباينة.
- \* تسمى الأعداد التي تحقق المتباينة حلول المتراجحة.

**مثال:** نعتبر المعادلة:  $3x - 5 \geq x + 3$

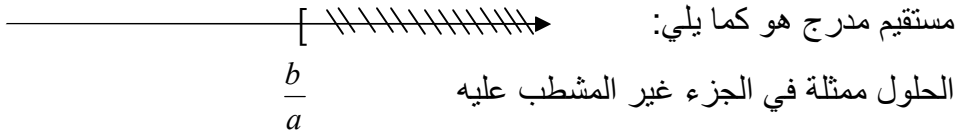
لدينا:  $3x - 5 \geq x + 3$  يعني  $3x - x \geq 3 + 5$  أي  $2x \geq 8$  أي  $x \geq \frac{8}{2}$  أي  $x \geq 4$ .

إذن حلول المتراجحة  $3x - 5 \geq x + 3$  هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي 4.

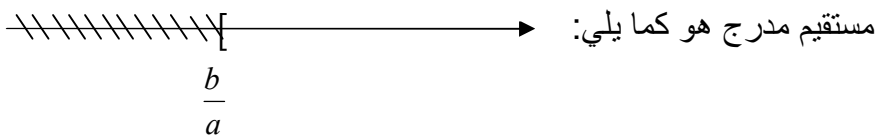
### 13. تمثيل مجموعة حلول متراجحة على مستقيم مدرج

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان حيث  $a > 0$ .

- \* حلول المتراجحة  $ax < b$  هي الأعداد  $x$  التي تحقق  $x < \frac{b}{a}$  و تمثيلها على



- \* حلول المتراجحة  $ax \geq b$  هي الأعداد  $x$  التي تحقق  $x \geq \frac{b}{a}$  و تمثيلها على



**ملاحظة هامة جدا:** إذا كان  $a < 0$  نغير اتجاه المتباينة عند القسمة على  $a$ .

## أدرب:

التمرين 1:

نعتبر المتراجحة التالية:  $-5x + 7 > 2x + 21$

- هل العدد 2 حل لهذه المتراجحة ؟
- حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج.

التمرين 2:

حل المتراجحة التالية ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج:

$$\frac{2x + 1}{3} - 1 \leq \frac{x - 1}{2}$$

التمرين 3:

1. حل المتراجحة  $7x > 8x - 3$  ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.

2. حل المتراجحة  $-2x + 1 > -5x - 2$  ثم مثل مجموعة حلولها على

مستقيم مدرج.

3. مثل على مستقيم مدرج مجموعة حلول الجملة التالية:

$$\begin{cases} 7x > 8x - 3 \\ -2x + 1 > -5x - 2 \end{cases}$$

## أنمي كفاءاتي:

المسألة 1:

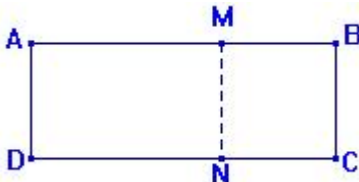
يقترح أحد النوادي لكراء أشرطة الفيديو على زبائنه حلين هما:  
الحل الأول: يشارك الزبون بمبلغ  $150 DA$  و يدفع مبلغ  $20 DA$  عند كراء كل شريط.

الحل الثاني: لا يشارك الزبون بأي مبلغ و يدفع مبلغ  $32 DA$  عند كراء كل

شريط.

انطلاقا من أي عدد للأشرطة المقنتاة يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول.

المسألة 2:



يمثل المستطيل  $ABCD$  قاعة يمكن تقسيمها إلى قاعتين مستطيلتين بواسطة جدار متحرك ممثل بالقطعة  $[MN]$ .



يعطى:  $AD = 10m$  ،  $AB = 30m$

و  $MB = xm$

عين قيم  $x$  التي يكون من أجلها ربع مساحة القاعدة

$AMND$  أصغر من مساحة القاعدة  $MBCN$ .

## حلول التمارين و المسائل

### حل التمرين 1

1. بتعويض العدد 2 في المتراجحة يكون لدينا:  $-5 \times 2 + 7 > 2 \times 2 + 21$

أي:  $-3 > 25$  و بما أن هذه المتباينة خاطئة فإن 2 ليس حلا

للمتراجحة.

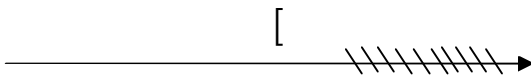
2.  $-5x + 7 > 2x + 21$  يعني  $-5x - 2x > 21 - 7$  أي  $-7x > 14$

بقسمة طرفي المتباينة على العدد  $(-7)$  و علما أن  $-7 < 0$  نتحصل بعد تغيير اتجاهها

على  $x < -2$ .

حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر تماما من العدد  $(-2)$  وتمثيلها على

مستقيم مدرج هو كما يلي:



الحلول -2

### حل التمرين 2

$$\frac{2x-2}{3} \leq \frac{x-1}{2} \text{ أي } \frac{2x+1-3}{3} \leq \frac{x-1}{2} \text{ يعني } \frac{2x+1}{3} - 1 \leq \frac{x-1}{2}$$

و هذا يعني  $2(2x-2) \leq 3(x-1)$  أي  $4x-4 \leq 3x-3$

أي  $4x-3x \leq -3+4$

و هذا يعني  $x \leq 1$ . إذن حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر من أو تساوي العدد 1

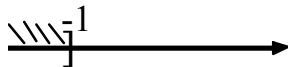
و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



الحلول 1

### حل التمرين 3

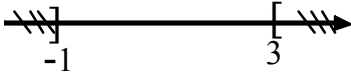
1.  $7x > 8x - 3$  يعني  $x < 3$  و لدينا



$$2. -2x + 1 > -5x - 2 \text{ يعني } x > -1 \text{ و لدينا}$$

$$3. \text{ حلول الجملة } \begin{cases} 7x > 8x - 3 \\ -2x + 1 > -5x - 2 \end{cases} \text{ هي الحلول المشتركة بين}$$

المتراجحتين  $7x > 8x - 3$  و  $-2x + 1 > -5x - 2$  و بالتالي  
فحلولها هي الأعداد المحصورة بين العددين  $-1$  و  $3$  و لدينا:



ليكن  $x$  عدد الأشرطة المقتناة.

الحل الأول: المبلغ المدفوع عند كراء  $x$  شريط فيديو هو:  $150 + 20x$

الحل الثاني: المبلغ المدفوع عند كراء  $x$  شريط فيديو هو:  $32x$

يكون الحل الأول أفضل من الحل الثاني إذا كان المبلغ المدفوع في الحل الأول أقل منه في

الحل الثاني و يؤول ذلك إلى حل المتراجحة:  $32x > 150 + 20x$

$$32x > 150 + 20x \text{ يعني } 32x - 20x > 150 \text{ أي } x > \frac{150}{12} \text{ أي } x > 12,5$$

و هكذا يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول انطلاقاً من كراء 13 شريط فيديو.

مساحة  $AMND$  هي  $10(30-x) m^2$  بينما مساحة  $MBCN$  هي  $10x m^2$

يكون ربع مساحة  $AMND$  أصغر من مساحة  $MBCN$  يعني  $\frac{10(30-x)}{4} < 10x$

و هذا يعني  $300 - 10x < 40x$  أي  $300 < 50x$  و بالتالي  $x > 6$ .

نصيحة

احذر شرود الذهن أثناء  
الدرس و المذاكرة.

أتذكر الأهم:

## 14. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

**تعريف:** نسمي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل جملة من الشكل:

$$\text{حيث } a, b, c, a', b', c' \text{ أعداد حقيقية معلومة.} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

## 15. الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

• **طريقة الجمع**

لحل جملة باستعمال طريقة الجمع نقوم بضرب المعادلتين في أعداد مختارة بهدف جعل معاملي أحد المجهولين متعاكسين بحيث يتم التخلص منه بالجمع طرف لطرف.

**مثال:** لحل الجملة 
$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$
 نقوم مثلا بضرب طرفي المعادلة (2) في 2

لنحصل على الجملة 
$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 & (1) \\ 2x + 2y = 10 & (2') \end{cases}$$
 و بعد جمع (1) و (2') طرف لطرف

نحصل على المعادلة  $6x = 12$  ذات الحل  $x = 2$ . لحساب  $y$  نعوض  $x$  بقيمته 2 في إحدى المعادلتين و لتكن (2) فنحصل على  $2 + y = 5$  أي  $y = 3$  و أخيرا نتحقق من أن (2;3) حل للجملة. إذن (2;3) هو الحل الوحيد للجملة.

• **طريقة التعويض**

لحل جملة باستعمال طريقة التعويض نكتب أحد المجهولين بواسطة الآخر في إحدى المعادلتين ثم نعوضه في المعادلة الأخرى بهدف الحصول على معادلة بمجهول واحد.

**مثال:** لحل الجملة 
$$\begin{cases} 2x + y = -1 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$
 نكتب مثلا  $x$  بواسطة  $y$  في (2) لنجد  $x = y + 4$

ثم نقوم بتعويضه في (1) لنجد  $2(y + 4) + y = -1$  فنحصل على  $y = -3$  و بعد تعويض  $y$  بقيمته في إحدى المعادلتين نجد  $x = 1$ .

## تمارين ومسائل

إذن  $(-3; 1)$  هو الحل الوحيد للجلمة.

### أدرب:

التمرين 1: حل باستعمال طريقة التعويض الجلمة التالية:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 30 & (1) \\ 2x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

التمرين 2: أوجد عددين علما أن مجموعهما 50 و أن الفرق بين العدد الأول و ضعف العدد الثاني هو 5.

### أنمي كفاءاتي:

المسألة 1: حل الجلمة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 7x + 4y = 104 & (2) \end{cases}$$

2. تتكون حمولة إحدى الشاحنات من 20 صندوق وزن بعضها 28 kg و وزن البعض الآخر 16 kg. علما أن وزن حمولة الشاحنة هو 416 kg عين عدد الصناديق التي وزنها 28 kg و عدد الصناديق التي وزنها 16 kg.

المسألة 2: حل الجلمة التالية:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

2. ثمن باقة زهور متكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو 13 DA بينما ثمن باقة متكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو 8 DA. ما هو ثمن باقة زهور متكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان؟

المسألة 3: عين طول و عرض قاعة مستطيلة الشكل علما أنه إذا زاد طولها بـ 1 m و زاد عرضها بـ 3 m زادت مساحتها بـ 25 m<sup>2</sup> أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بـ 1 m نقصت مساحتها بـ 9 m<sup>2</sup>.

## المسألة 4:

$$\begin{cases} x + y = 360 & (1) \\ 50x + 75y = 21750 & (2) \end{cases}$$

2. لزيارة أحد المتاحف فإن ثمن تذكرة الدخول بالنسبة للكبار هو  $75DA$

بينما ثمنها

بالنسبة للصغار هو  $50DA$ . علما أن في هذا اليوم كان عدد الزوار  $360$  زائرا و أن مداخيل المتحف قدرت بـ  $21750DA$  حدد عدد الصغار و عدد الكبار الذين قاموا بزيارة المتحف في هذا اليوم.

## حلول التمارين و المسائل

### حل التمرين 1

باستعمال المعادلة (2) نكتب مثلا  $y$  بواسطة  $x$  فنحصل على  $y = 7 - 2x$ . لنعوض  $y$  بعبارته بواسطة  $x$  في المعادلة (1) فنحصل هكذا على:  $30 = 3x - 5(7 - 2x)$  أي  $30 = 3x - 35 + 10x$  و هذا يعني  $13x = 65$  أي  $x = 5$ .  
لنعوض الآن  $x$  بـ  $5$  في (2) فنحصل على  $7 = 2 \times 5 + y$  أي  $-3 = 7 - 10 = y$ .  
إذن  $(5; -3)$  هو الحل الوحيد للجملة.

### حل التمرين 2

إذا رمزنا إلى العددين بـ  $x$  و  $y$  يكون لدينا:  $\begin{cases} x + y = 50 & (1) \\ x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$   
لنستعمل مثلا طريقة الجمع لحل هذه الجملة و من أجل ذلك نقوم بضرب طرفي (1) في 2 لنحصل على الجملة (1') و بجمع (1') و (2) طرفا لطرف نحصل على  $3x = 105$  أي  $x = \frac{105}{3} = 35$ . للحصول على  $y$  نعوض مثلا  $x$  بـ  $35$  في (1) لنحصل على  $50 = 35 + y$  أي  $15 = 50 - 35 = y$ .  
و هكذا فإن حل الجملة الوحيد هو الثنائية  $(35; 15)$ .

1. لحل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي

المعادلة (1) في (-4)

$$\text{لنحصل على الجملة } \begin{cases} -4x - 4y = -80 & (1') \\ 7x + 4y = 104 & (2) \end{cases} \text{ و بالجمع طرف لطرف نحصل}$$

على:  $3x = 24$  أي  $x = 8$ . بالتعويض في (1) نجد  $8 + y = 20$  أي  $y = 12$ .  
إذن (8 ; 12) هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  عدد الصناديق التي وزنها  $28\text{kg}$  و  $y$  عدد الصناديق التي وزنها  $16\text{kg}$ .

• بما أن عدد الصناديق في الشاحنة 20 فإن  $x + y = 20$ .

• حمولة الشاحنة هي  $28x + 16y$  و منه  $28x + 16y = 416$ .

$$\text{نحصل هكذا على الجملة } \begin{cases} x + y = 20 \\ 28x + 16y = 416 \end{cases}$$

بقسمة طرفي المعادلة الثانية على العدد 4 نحصل على الجملة  $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 4y = 104 \end{cases}$  المعرفة

في السؤال الأول و التي حلها (8 ; 12).

إذن عدد الصناديق التي وزنها  $28\text{kg}$  هو 8 بينما عدد الصناديق التي وزنها  $16\text{kg}$  هو 12.

1. لحل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي

المعادلة (2) في (-1)

$$\text{لنحصل على الجملة } \begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ -x - 2y = -8 & (2') \end{cases} \text{ و بالجمع طرف لطرف}$$

نحصل على:  $4x = 4$  أي  $x = 1$ . بالتعويض في (1) نجد  $5 + 2y = 13$  أي  $2y = 8$  و  
منه  $y = 4$ .

إذن (1 ; 4) هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  ثمن زهرة نرجس و  $y$  ثمن زهرة أقحوان.

\* ثمن باقة زهور متكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو  $5x + 2y$ .

\* ثمن باقة متكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو  $x + 2y$ .

و هكذا يكون لدينا:  $\begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$  و بما أن حل هذه الجملة هو (1 ; 4) فإن:

ثمن زهرة نرجس هو  $1DA$  و ثمن زهرة أقحوان هو  $4DA$ . و بالتالي فثمن باقة زهور متكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان هو  $(4 \times 1 + 3 \times 4)DA$  أي  $16DA$ .

### حل المسألة 3

ليكن  $x$  طول القاعدة و  $y$  عرضها و منه فمساحتها هي  $xy$ .  
إذا زاد طولها بـ  $1m$  و زاد عرضها بـ  $3m$  تصبح مساحتها  $(x+1)(y+3)$

أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بـ  $1m$  تصبح مساحتها  $(x-1)(y-1)$

يكون هكذا لدينا:  
(1)  $(x+1)(y+3) = xy + 25$   
(2)  $(x-1)(y-1) = xy - 9$  و هذا يعني:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 & (1') \\ x + y = 10 & (2') \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 3x + y + 3 + xy = xy + 25 & (1) \\ -x - y + 1 + xy = xy - 9 & (2) \end{cases}$$

لحل هذه الجملة نستعمل مثلا طريقة التعويض فنحصل هكذا من (2') على  $y = 10 - x$   
و بعد التعويض في (1') نحصل على  $3x + 10 - x = 22$  أي  $2x = 12$  و بالتالي  $x = 6$   
و منه  $y = 4$  بعد التعويض في إحدى المعادلات.  
و هكذا فإن طول القاعدة هو  $6m$  و عرضها هو  $4m$ .

### حل المسألة 4

1. لحل الجملة (1)  $x + y = 360$   
(2)  $50x + 75y = 21750$  نستعمل مثلا طريقة

الجمع فنقوم

$$\begin{cases} 75x + 75y = 27000 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases} \text{ بضرب طرفي المعادلة (1) في 75 لنحصل على الجملة}$$

و بالطرح طرف لطرف نحصل على:  $25x = 5250$  أي  $x = 210$ . بالتعويض في (1)  
نجد  $210 + y = 360$  أي  $y = 150$ .

إذن (210; 150) هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن  $x$  عدد الصغار و  $y$  عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم.

\* عدد الزوار في هذا اليوم هو  $x + y$ .

\* مداخيل المتحف في هذا اليوم هي  $50x + 75y$ .

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases} \quad \text{و هكذا يكون لدينا:}$$

- بما أن الحل الوحيد لهذه الجملة حسب السؤال الأول هو (210; 150) فإن:
- عدد الصغار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 210.
  - عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 160.

### حل المسألة 5

إذا رمزنا إلى مساحة المربع بـ  $A$  و إلى مساحة المستطيل بـ  $A'$  يكون لدينا:

$$A = 255 m^2 \quad \text{نجد بعد الحل:} \quad \begin{cases} A + A' = 850 \\ 7A - 3A' = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} A + A' = 850 \\ \frac{A}{A'} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{و } A' = 595 m^2$$

### تمرين إضافي

انطلق أحد الراجلين من مدينة  $A$  نحو مدينة  $B$  على الساعة 8 بسرعة متوسطة قدرها  $5 km/h$  في حين انطلق دراج على الساعة 10 من نفس المدينة  $A$

نحو  $B$  بسرعة متوسطة قدرها  $28 km/h$ .

على بعد أي مسافة من المدينة  $A$  يلتحق الدراج بالراجل و في أي ساعة؟

### التمرين:

### نصيحة

لا تتردد في إنجاز  
الوظائف  
و المذاكرة، فالتردد



أتذكر الأهم:

### 16. الدالة الخطية

**تعريف:**  $a$  عدد معطى. نعرف دالة خطية  $f$  لما نرفق بكل عدد  $x$  العدد  $ax$  و نرسم:  $f: x \mapsto ax$ . العدد  $ax$  هو صورة العدد  $x$  بـ  $f$  و نكتب:  $f(x) = ax$ . يسمى العدد  $a$  معامل الدالة الخطية  $f$ .  
**التمثيل البياني لدالة خطية:** التمثيل البياني للدالة الخطية  $f: x \mapsto ax$  هو المستقيم الذي يمر من المبدأ و الذي معادلته:  $y = ax$ . هو معامل توجيه المستقيم.  
**مثال:** الدالة  $f: x \mapsto 3x$  هي الدالة الخطية ذات المعامل 3 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة  $y = 3x$ . هو معامل توجيه المستقيم.

### 17. الدالة التآلفية

**تعريف:**  $a$  و  $b$  عدنان معلومان. نعرف دالة تآلفية  $f$  لما نرفق بكل عدد  $x$  العدد  $ax + b$ . و نرسم:  $f: x \mapsto ax + b$ . العدد  $ax + b$  هو صورة العدد  $x$  بـ  $f$  و نكتب:  $f(x) = ax + b$ . يسمى العدد  $a$  معامل الدالة التآلفية  $f$ .  
**التمثيل البياني لدالة تآلفية:** التمثيل البياني للدالة التآلفية  $f: x \mapsto ax + b$  هو المستقيم الذي معادلته:  $y = ax + b$ . يسمى العدد  $a$  معامل توجيه المستقيم و يسمى  $b$  الترتيب عند المبدأ.

**مثال:** الدالة  $f: x \mapsto -2x + 1$  هي الدالة التآلفية ذات المعامل -2 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة  $y = -2x + 1$ . هو معامل توجيه المستقيم.

### 18. النسب المئوية

\* أخذ  $t\%$  من  $x$  هو حساب  $\frac{t}{100} \cdot x$ . الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:  $x \mapsto \frac{t}{100}x$

\*زيادة  $x$  بـ  $t\%$  هو حساب  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)x$ . الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

$$.x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$$

\*خفض  $x$  بـ  $t\%$  هو حساب  $\left(1 - \frac{t}{100}\right)x$ . الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

$$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$$

## تمارين ومسائل

### أدرب:

التمرين 1:

نعتبر الدالة الخطية:  $f: x \mapsto 2x$ .

1. عين صورة العدد  $(-3)$ .

2. عين العدد الذي صورته 1.

التمرين 2: عين معامل الدالة الخطية  $f$  التي تحقق  $f(2) = -5$  ثم مثلها بيانيا.

التمرين 3:

التمثيل البياني المقابل هو لدالة

خطية  $f$ .

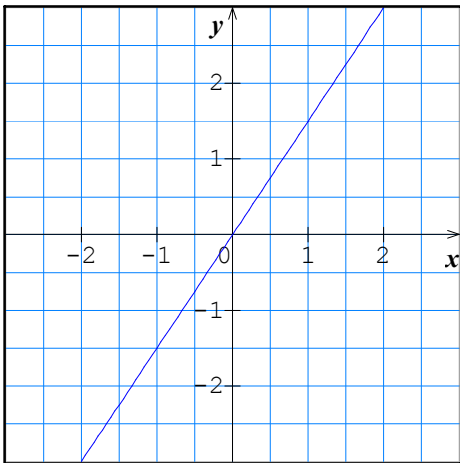
أجب عن الأسئلة التالية باستعمال

التمثيل البياني.

1. عين صورة العدد  $-1$ .

2. عين العدد الذي صورته  $\frac{3}{2}$ .

3. أكمل الجدول التالي:



$x$	-2		1	
$f(x)$		-1		3

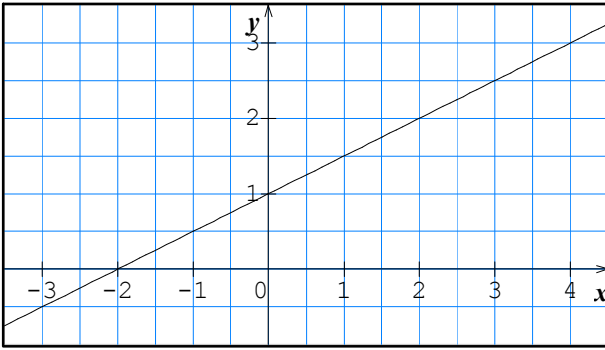
أحسب  $a$  معامل الدالة الخطية.

**التمرين 4:** نعتبر الدالة التآلفية:  $g : x \mapsto -2x + 5$ .

1. عين صورة العدد 2. ثم عين العدد الذي صورته -2.
2. ارسم التمثيل البياني للدالة  $g$ .

**التمرين 5:** لتكن  $f$  الدالة التآلفية التي تحقق:  $f(-1) = -5$  و  $f(2) = 4$ .

عين عبارة الدالة التآلفية  $f$ .



**التمرين 6:** ا لتمثيل البياني المقابل

هو لدالة تآلفية  $f$ . أجب

عن الأسئلة

التالية باستعمال التمثيل البياني.

1. عين صورة كل من -3

و 2

2. عين العدد الذي

صورته  $\frac{5}{2}$ .

3. أحسب  $a$  معامل الدالة  $f$ .

أعط العبارة الجبرية لـ  $f$ .

**التمرين 7:** لتكن  $f$  الدالة التآلفية التي تحقق:  $f(1) = 1$  و  $f(2) = 5$ .

عين عبارة الدالة التآلفية  $f$ .

**التمرين 8:** نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  حيث  $f : x \mapsto -3x + 2$  و  $g : x \mapsto 2x - 3$ .

1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين  $(D)$  و  $(D')$  الممثلين

للدالتين

$f$  و  $g$  على الترتيب.

2. حل بيانيا الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

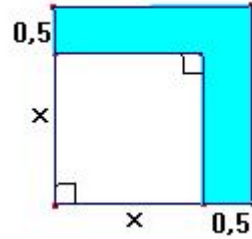
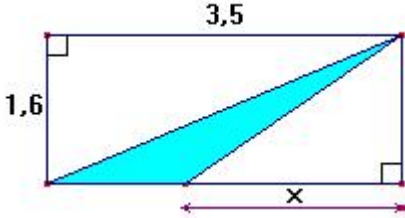
**التمرين 9:**

- رفع تاجر ثمن سلعه بنسبة 9%. ثمن سلعة  $DA$   $x$  ليصبح ثمنها بعد الزيادة  $y DA$ .
1. عبر عن  $y$  بدلالة  $x$ .
  2. ثمن جهاز  $A$  قبل الزيادة هو  $217 DA$ . ما هو ثمنه بعد الزيادة؟
  3. ثمن جهاز  $B$  بعد الزيادة هو  $545 DA$ . ما هو ثمنه قبل الزيادة؟

**التمرين 10** خفض تاجر ثمن إحدى سلعه المقدر بـ  $390 DA$  مرتين متتاليتين الأولى بنسبة 10% و الثانية بنسبة 15%.

1. ما هو الثمن النهائي لهذه السلعة؟
2. ما هي نسبة التخفيض الإجمالية؟ ما هو رأيك؟

**التمرين 11** في كل حالة من الحالات التالية عبر عن  $A(x)$  مساحة الجزء المظلل بدلالة  $x$ .



## أنمي كفاءاتي:

**المسألة 1:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ .

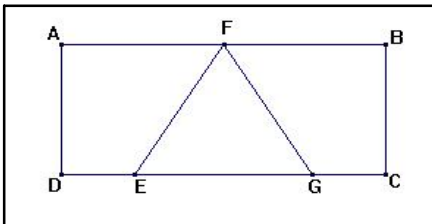
1. نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  حيث  $f: x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

و  $g: x \mapsto -3x + 9$

أ- أحسب  $f(0)$  ،  $g(0)$  ،  $f(2)$  ،  $g(2)$ .

ب- عين العدد الذي صورته 5 بالدالة  $g$ .

ت- أرسم التمثيلين البيانيين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب.



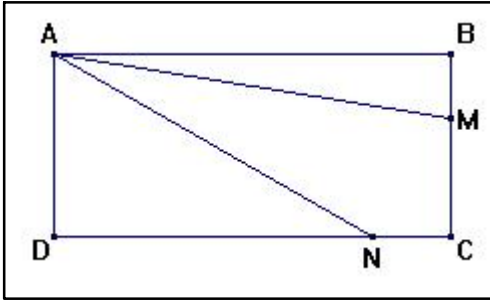
2.  $ABCD$  مستطيل حيث:  $AB = 6cm$  ،

$AD = 3cm$  ،  $F$  منتصف  $[AB]$ .

$E$  و  $G$  نقطتان من  $[DC]$  حيث:  $DE = CG$ .

نضع  $DE = x$ .

- أ- علما أن النقط  $D, E, G, C$  تحافظ على هذا الترتيب حدد بين أي قيم يتغير  $x$ .
- ب- أحسب بدلالة  $x$  المساحات  $A(x), B(x)$  و  $C(x)$  للمضلعات  $EFG, AFED$  و  $FBCG$  على الترتيب.
- ت- عين بيانيا باستعمال السؤال الأول قيمة  $x$  التي ينقسم من أجلها المستطيل  $ABCD$  إلى 3 أجزاء لها نفس المساحة.
- ث- تحقق من صحة النتيجة بالحساب.



- المسألة 2:** مستطيل  $ABCD$  مستطيل حيث:  
 $AD = 4\text{cm}$  ،  $AB = 6\text{cm}$   
 نقطة  $M$   
 من  $[BC]$  و  $N$  نقطة من  $[CD]$  حيث:  
 $BM = CN = x$ ، أنظر الشكل المقابل  
 1. عبر بدلالة  $x$  عن مساحة  $A(x)$  المثلث  $ABM$ .

2. أحسب  $DN$  بدلالة  $x$  ثم بين أن مساحة المثلث  $ADN$  هي  $B(x) = -2x + 12$ .
3. نعتبر الدالتين التآلفيتين  $f: x \mapsto 3x$  و  $g: x \mapsto -2x + 12$
- أرسم التمثيلين البيانيين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب.
  - عين إحداثيات نقطة تقاطع  $(d_1)$  و  $(d_2)$ .
  - عين قيمة  $x$  التي يكون من أجلها  $A(x) = B(x)$ . برر الإجابة ثم أحسب من أجل القيمة المحصل عليها مساحة الرباعي  $AMCN$ .

## حلول التمارين و المسائل

1. لدينا  $f(-3) = 2(-3) = -6$  إذن صورة العدد  $(-3)$  هي العدد  $(-6)$ .
2. العدد الذي صورته 1 هو العدد  $x$  الذي يحقق  $2x = 1$  أي  $x = 0,5$ .

حل التمرين 1

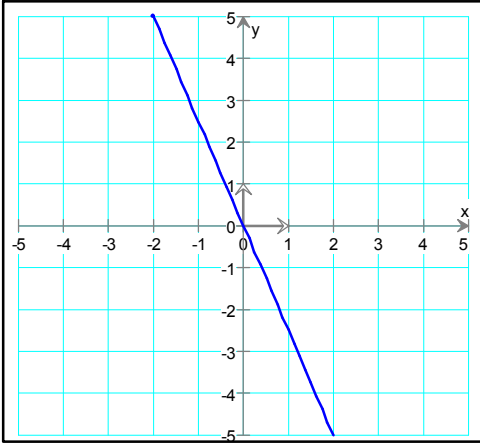
بما أن  $f$  دالة خطية فإن  $f: x \mapsto ax$   
 أو بصيغة أخرى  $f(x) = ax$ .

حل التمرين 2

$$a = -\frac{5}{2} \text{ أي } 2 \times a = -5 \text{ يعني } f(2) = -5$$

ومنه معامل الدالة الخطية  $f$  هو  $-\frac{5}{2}$ .

لرسم المستقيم الممثل للدالة الخطية  $f$  يكفي، إضافة إلى المبدأ، رسم نقطة ثانية وهي مثلا النقطة  $(2; -5)$  لأن  $f(2) = -5$ .



### حل التمرين 3

1. صورة العدد -1 هو

$$\text{العدد } -\frac{3}{2}. \text{ لدينا هكذا } f(-1) = -\frac{3}{2}$$

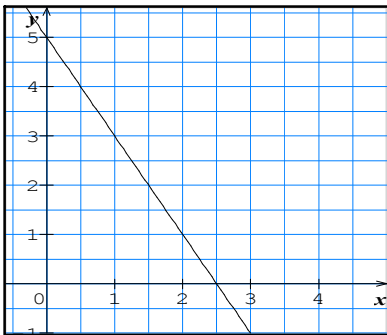
2. العدد الذي صورته  $\frac{3}{2}$  هو العدد 1. لدينا هكذا  $f(1) = \frac{3}{2}$ .

$$3. f(2) = 3, f(-2) = -3$$

$x$	-2	-1	1	2
$f(x)$	-3	-1,5	1,5	3

4. معامل الدالة الخطية  $f$  هو معامل التناسبية ولدينا مثلا:

$$a = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \text{ أي } a = \frac{3 - 1,5}{1} \text{ و هكذا نجد أن } a = 1,5$$



### حل التمرين 4

$$g(2) = -2(2) + 5 = 1$$

$$2. \text{ ومنه } g(2) = 1$$

إذن صورة 2 هي العدد الذي

صورته -2 هو العدد  $x$  الذي

$$\text{يحقق } g(x) = -2 \text{ أي}$$

$$-2x + 5 = -2 \text{ وهذا يعني } -2x = -7$$

$$\text{أي } x = \frac{7}{2}$$

### 3. انظر الرسم المقابل.

#### حل التمرين 5

بما أن  $f$  دالة تآلفية فإن  $f(x) = ax + b$ . نعلم أن معامل توجيهها هو

نفسه معامل التناسبية و هكذا يكون لدينا:  $a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$  و منه

$$a = \frac{4 - (-5)}{3} = \frac{9}{3}$$

إذن  $a = 3$ .  $f(2) = 4$  يعني  $3(2) + b = 4$  أي  $b = 4 - 6$  ومنه  $b = -2$ .

نجد هكذا أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية  $f$  هي:  $f(x) = 3x - 2$ .

#### حل التمرين 6

1. نقرا من التمثيل البياني أن:  $f(-3) = -\frac{1}{2}$  و أن  $f(2) = 2$ .

2. نقراً من التمثيل البياني أن العدد الذي صورته  $\frac{5}{2}$  هو 3.

3. لدينا مثلاً:  $f(-2) = 0$  و  $f(0) = 1$  و منه:  $a = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$  أي  $a = \frac{1 - 0}{2}$

و بالتالي  $a = \frac{1}{2}$ . معامل توجيه الدالة  $f$  هو  $\frac{1}{2}$ .

4. نعلم أن  $b$  هو الترتيب عند المبدأ و بما أن  $f(0) = 1$  فإن  $b = 1$ .

العبارة الجبرية للدالة  $f$  هي إذن:  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .

#### حل التمرين 7

بما أن  $f$  دالة تآلفية فإن  $f(x) = ax + b$ .

لدينا  $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$  يعني  $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$  نحصل هكذا على جملة معادلتين من

الدرجة الأولى بمجهولين  $a$  و  $b$  و لنستعمل مثلاً طريقة الجمع لحلها و من أجل ذلك نقوم

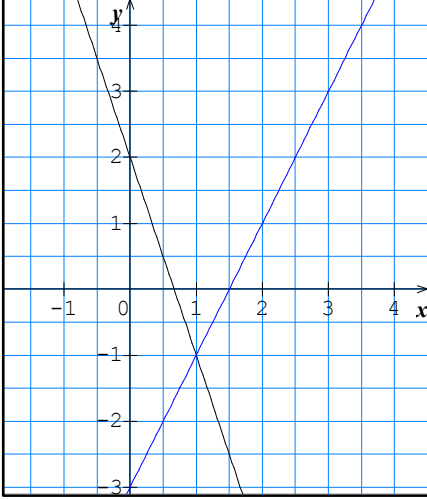
بضرب طرفي المعادلة الأولى في (-1) لنحصل على  $\begin{cases} -a - b = -1 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد:  $a = 4$  ثم بالتعويض مثلاً في المعادلة الأولى نحصل على

$$4 + b = 1 \text{ أي } b = -3$$

العبارة الجبرية للدالة  $f$  هي إذن:  $f(x) = 4x - 3$ .

1. يكفي تعيين نقطتين لرسم المستقيم ( $D$ )  
لدينا مثلا  $f(0) = 2$  و  $f(0,5) = 0,5$  و منه يمر  
المستقيم ( $D$ ) من النقطتين  $(0;2)$  و  $(-0,5;0,5)$ .



نفس الشيء بالنسبة للمستقيم ( $D'$ ) فهو مثلا يمر  
من النقطتين  $(0;-3)$  و  $(2;1)$  لأن  $g(0) = -3$   
و  $g(2) = 1$ .

2. نلاحظ ان الجملة المقترحة يمكن كتابتها

$$\text{على الشكل التالي: } \begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \text{ و بالتالي}$$

فإن حل هذه الجملة هي إحداثيات نقطة تقاطع  
المستقيمين ( $D$ ) و ( $D'$ ).

نقرأ من التمثيلين البيانيين أن المستقيمين ( $D$ )  
و ( $D'$ ) يتقاطعان في النقطة  $(1;-1)$ .

الحل الوحيد للجملة هو إذن  $(1;-1)$ .

1. بما أن نسبة الزيادة هي 9% فإن الزيادة هي  $\frac{9}{100}x$  و هكذا يكون

$$\text{لدينا: } y = x + \frac{9}{100}x$$

$$y = x + 0,09x$$

و بالتالي:  $y = 1,09x$

2. في هذه الحالة لدينا  $x = 217$  و منه  $y = 1,09 \times 217$  أي  $y = 236,53$ .  
و بالتالي ثمن الجهاز  $A$  بعد الزيادة هو  $236,53 DA$ .

3. في هذه الحالة لدينا  $y = 545$  و منه  $545 = 1,09x$  أي  $x = \frac{545}{1,09} = 500$

و بالتالي ثمن الجهاز  $B$  قبل الزيادة هو  $500 DA$ .

1. إذا رمزنا إلى ثمن السلعة بعد لتخفيض الأول بـ  $P_1$  و إلى ثمنها بعد  
التخفيض الثاني بـ  $P_2$ . بما أن نسبة التخفيض في المرة الأولى هي 10%



يكون لدينا:  $390 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) P_1$  أي  $P_1 = 0,9 \times 390$  و منه  $P_1 = 351 DA$ .

و بما أن نسبة التخفيض في المرة الثانية هي 15% يكون لدينا:  $P_2 = \left(1 - \frac{15}{100}\right) P_1$

و هذا يعني  $P_2 = 0,85 \times 351$  و بالتالي:  $298,35 DA$ .

2. إذا رمزنا إلى نسبة التخفيض الإجمالية بالرمز  $x$  يكون لدينا:

$$1 - \frac{298,35}{390} = \frac{x}{100} \text{ و بالتالي } \frac{298,35}{390} = 1 - \frac{x}{100} \text{ أي } 298,35 = \left(1 - \frac{x}{100}\right) 390$$

$$\text{أي } x = 100 \left(1 - \frac{298,35}{390}\right) \text{ و منه } x = 23,5$$

إذن نسبة التخفيض الإجمالية هي 23,5%.

نلاحظ أن  $23,5\% \neq 10\% + 15\%$ .

#### حل التمرين 11

• بالنسبة للشكل الأول لدينا:

$$A(x) = (x + 0,5)^2 - x^2$$

$$A(x) = x^2 + x + 0,25 - x^2$$

$$A(x) = x + 0,25$$

• بالنسبة للشكل الثاني لدينا:

$$A(x) = \frac{1,6 \times 3,6}{2} - \frac{1,6 \times x}{2}$$

$$A(x) = 0,8 \times 3,6 - 0,8 \times x$$

$$A(x) = -0,8x + 2,88$$

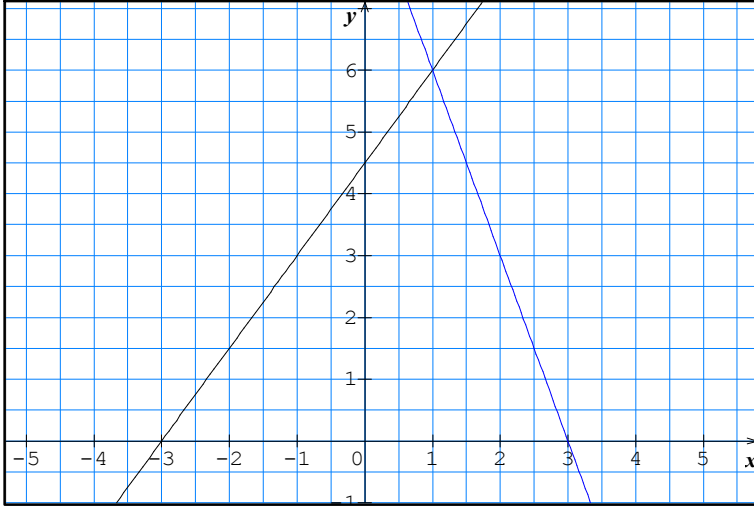
#### حل المسألة 1

$$g : x \mapsto -3x + 9 \text{ و } f : x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \cdot 1$$

$$\text{أ- } g(2) = 3, f(2) = \frac{15}{2}, g(0) = 9, f(0) = \frac{9}{2}$$

$$\text{ب- } g(x) = 5 \text{ يعني } -3x + 9 = 5 \text{ نجد } x = \frac{4}{3}$$

ت-



2. علما أن النقط  $D, E, G, C$  تحافظ على هذا الترتيب يكون لدينا:

أ- العدد  $x$  يتغير بين القيمتين 0 و 3 أي  $0 \leq x \leq 3$ .

ب- لدينا:  $A(x) = \frac{3 \times (6 - 2x)}{2}$  أي  $A(x) = -3x + 9$  و لدينا:

$B(x) = \frac{(3+x) \times 3}{2}$  أي  $B(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$  و نلاحظ أن  $C(x) = B(x)$ .

ت- نلاحظ أن  $A(x) = g(x)$  و أن  $C(x) = B(x) = f(x)$  و بالتالي

يكون لدينا  $A(x) = B(x) = C(x)$  من أجل  $x = 1$  فاصلة نقطة تقاطع  $(d_1)$  و  $(d_2)$ .

ث- بالنسبة للتحقق نقترح طريقتين:

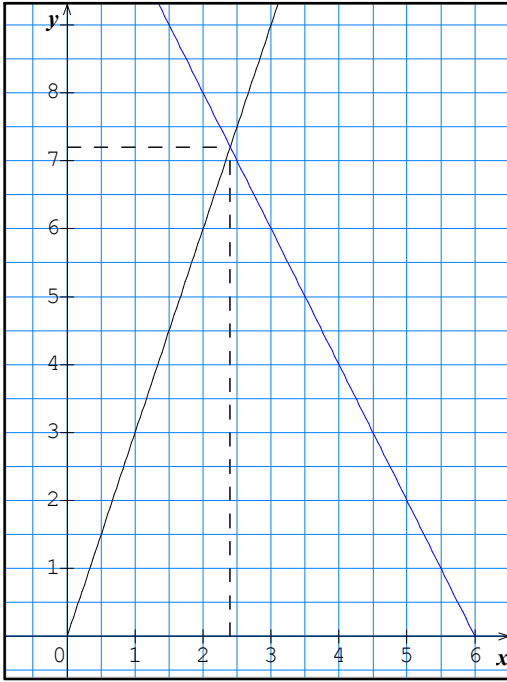
\* الطريقة الأولى:  $C(x) = B(x) = f(x)$  يعني  $-3x + 9 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$  أي

$$-6x + 18 = 3x + 9 \quad \text{و هكذا نجد } -9x = -9 \quad \text{أي } x = 1.$$

\* الطريقة الثانية: مساحة المستطيل هي  $6 \times 3 = 18$  و بالتالي فإن ثلثها هو 6

و هكذا يكون لدينا:  $-3x + 9 = 6$  أي  $-3x = -3$  و منه  $x = 1$ .

$$1. A(x) = \frac{6 \times x}{2} \text{ و منه } A(x) = 3x$$



2. النقط  $D, N$  و  $C$  في استقامية و منه:

$$DN = 6 - x \text{ أي } DN = DC - NC$$

$$\text{و منه } B(x) = \frac{4 \times (6 - x)}{2}$$

$$B(x) = 12 - 2x$$

3. • أنظر الشكل المقابل

• الفاصلة  $x$  لنقطة التقاطع تحقق

$$3x = -2x + 12 \text{ أي } f(x) = g(x)$$

و منه  $x = \frac{12}{5}$  ثم بالتعويض مثلا في  $f(x)$

$$\text{نجد أن ترتيب نقطة التقاطع هي } y = \frac{36}{5}$$

إذن نقطة التقاطع هي  $\left(\frac{12}{5}; \frac{36}{5}\right)$ .

$$A(x) = B(x) \text{ يعني } f(x) = g(x) \text{ أي } x = \frac{12}{5}$$

لتكن  $C(x)$  مساحة الرباعي  $AMCN$ . لدينا:  $C(x) = 24 - (3x) - (-2x + 12)$

$$\text{نجد } C(x) = -x + 12 \text{ و من أجل } x = \frac{12}{5} \text{ يكون لدينا } C(x) = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ cm}^2$$

## أتذكر الأهم:

### 19. التكرار المجمع المتزايد(الصاعد) - التكرار المجمع المتناقص(النازل)

**تعريف:** - التكرار المجمع المتزايد لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأصغر منها.  
- التكرار المجمع النازل لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأكبر منها.

**مثال:** تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

العلامات	8	9	10	11	12	13
التكرارات	3	6	2	5	3	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	9	11	16	19	20
التكرارات المجمعة المتناقصة	20	17	11	9	4	1

### 20. الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية

**تعريف:** - الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو حاصل قسمة مجموع قيم هذه السلسلة على التكرار الكلي ( عدد قيمها ). و غالبا ما نرمز إليه بالرمز  $\bar{x}$ .  
- الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة إحصائية مرفقة بتكراراتها هو حاصل قسمة جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع التكرارات.

- الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية مجمعة في فئات هو حاصل قسمة مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها على مجموع التكرارات.

**مثال:** تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

العلامات	8	9	10	11	12	13
التكرارات	3	6	2	5	3	1

$$\bar{x} = \frac{3 \times 8 + 6 \times 9 + 2 \times 10 + 5 \times 11 + 3 \times 12 + 1 \times 13}{3 + 6 + 2 + 5 + 3 + 1} = \frac{202}{201} = 10,10$$

### 21. الوسيط

**تعريف:** وسيط سلسلة إحصائية مرتبة هو قيمة المتغير التي تقسم السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار. و غالبا ما نرمز إليه بالرمز  $Me$ .

- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا فوسيطها هو القيمة المركزية.
- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجيا فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين.

**مثال:**

- وسيط السلسلة: 2، 3، 3، 5، 6، 6، 6 هو 5 لأن التكرار الكلي فردي (7).

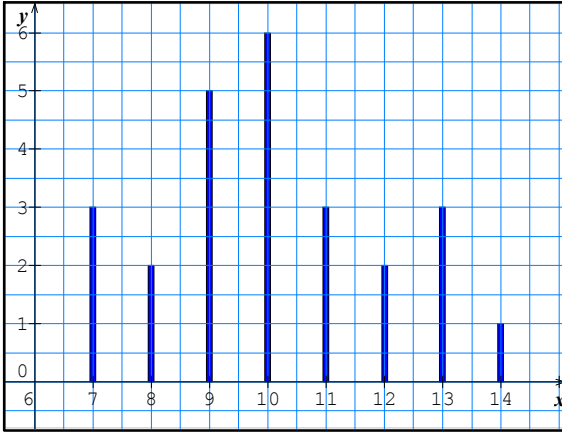
- وسيط السلسلة: 3، 3، 5، 6، 6، 6، 7 هو  $\frac{5+6}{2} = 5,5$  لأن التكرار الكلي زوجي (8)

## مسائل

### أنمي كفاءاتي:

#### المسألة 1:

المخطط بالأعمدة المقابل  
يمثل توزيع علامات تلاميذ  
إحدى أقسام  
السنة الرابعة متوسط في فرض  
الرياضيات.



1. كم عدد تلاميذ هذا القسم ؟
2. أعط جدول التكرارات المجمعة.
3. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9 ؟
4. ما هو معدل القسم في الفرض ؟
5. ما هي النقطة الوسيطة ؟

المسألة 2: علامات الرياضيات المحصل عليها من قبل 150 تلميذ إحدى الإكاليات في الامتحان التجريبي لشهادة التعليم المتوسط هي موزعة في الجدول الموالي:

العلامات $n$	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n < 20$
عدد التلاميذ	14	$x$	55	20	9

1. احسب العدد  $x$  ثم ارسم المدرج التكراري لهذه السلسلة.
2. بعد تعيين مراكز الفئات أحسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة.
3. عين الفئة التي ينتمي إليها الوسيط.
4. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12 ؟
5. ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 ؟

## حل المسائل

حل المسألة: 1

1. عدد تلاميذ القسم هو 25.  
2.

العلامات	7	8	9	10	11	12	13	14
التكرارات	3	2	5	6	3	2	3	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	5	10	16	19	21	24	25
التكرارات المجمعة المتناقصة	25	22	20	15	9	6	4	1

3. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9 هو 20.

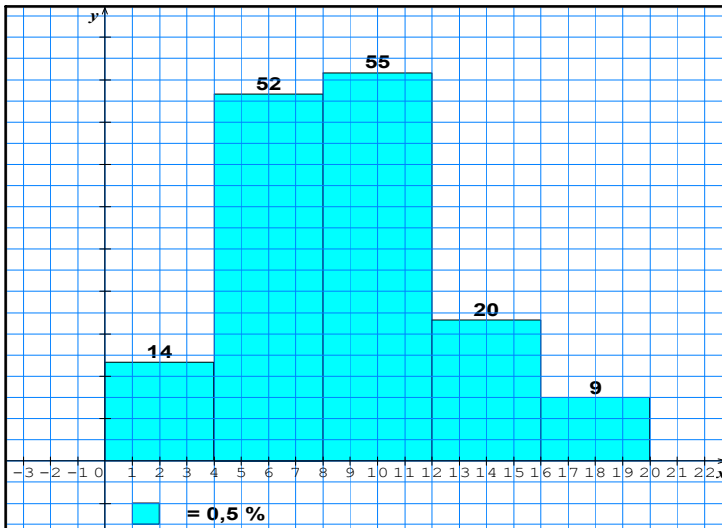
$$4. \bar{x} = \frac{3 \times 7 + 2 \times 8 + 5 \times 9 + 6 \times 10 + 3 \times 11 + 2 \times 12 + 3 \times 13 + 1 \times 14}{3 + 2 + 5 + 6 + 3 + 2 + 3 + 1} = 10,08$$

القسم هو إذن 10,08.

5. النقطة الوسيطة هي 12.

حل المسألة: 2

1. لدينا:  $14 + x + 55 + 20 + 9 = 155$  و منه  $x = 52$ .



2.

العلامات $n$	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n < 20$
مركز الفئة	2	6	10	14	18
عدد التلاميذ	14	52	55	20	9

$$\bar{x} = 8,88 \text{ ومنه } \bar{x} = \frac{2 \times 14 + 6 \times 52 + 10 \times 55 + 14 \times 20 + 18 \times 9}{150} = \frac{1332}{150}$$

3. القيمة الوسيطة هي القيمة الموافقة للعلامة المحصورة بين 75 و 76 و اللذان ينتميان إلى الفئة  $8 \leq n < 12$  و هي الفئة الوسيطة.

4. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12 هو 121.

5. التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هم التلاميذ الذين تتراوح علاماتهم بين 12 و 20 و هكذا عددهم هو 29 لأن  $150 - 121 = 29$ . و بالتالي فإن نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هي:  $\frac{29}{150} \times 100$  أي 19,34.

نصيحة

لا تؤجل عمل اليوم إلى غد.

أتذكر الأهم:

## 22. مبرهنة طالس

نص المبرهنة:  $(d)$  و  $(d')$  مستقيمان متقاطعان في النقطة  $A$ .

$B$  و  $M$  نقطتان من  $(d)$  تختلفان عن  $A$ .  $C$  و  $N$  نقطتان من  $(d')$  تختلفان عن  $A$ .

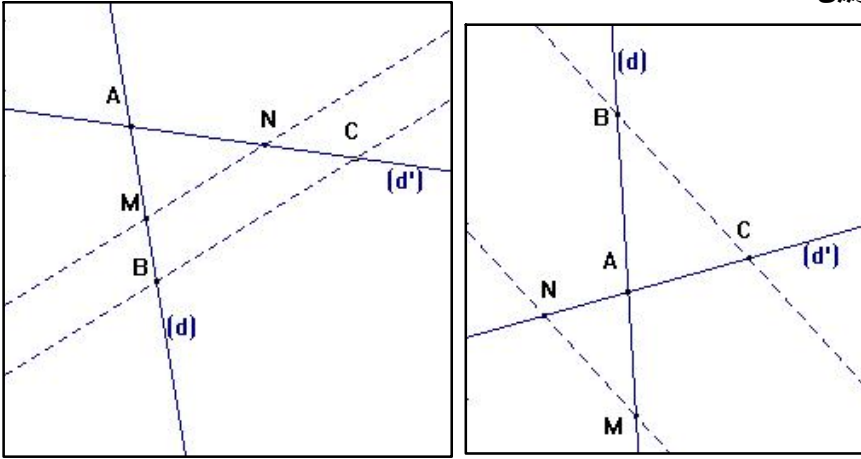
إذا كان المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  متوازيين فإن  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ .

ملاحظة:

- تسمح مبرهنة طالس من حساب طول بمعرفة الأطوال الثلاثة الأخرى .
- تسمح مبرهنة طالس من إثبات أن مستقيمين غير متوازيين بحيث أنه في شروط

مبرهنة طالس إذا كان  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$  يكون المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  غير

متوازيين.



## 23. المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس

نص المبرهنة:  $(d)$  و  $(d')$  مستقيمان متقاطعان في النقطة  $A$ .



$B$  و  $M$  نقطتان من  $(d)$  تختلفان عن  $A$ . و  $C$  و  $N$  نقطتان من  $(d')$  تختلفان عن  $A$ .  
إذا كان  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  وإذا كانت  $A, B, M$  بنفس ترتيب النقط  $A, C, N$  يكون

## تمارين ومسائل

المستقيمان  $(BC)$  و  $(MN)$  متوازيين .

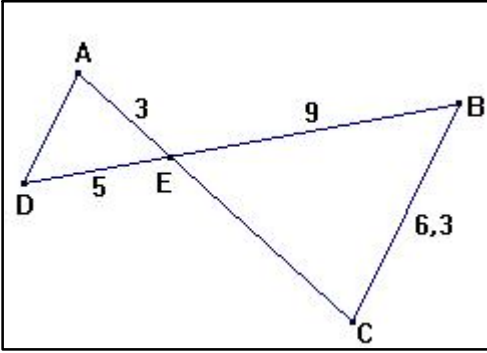
### أُتدرب:

التمرين 1:

باستعمال معطيات الشكل

المقابل و علما أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(AD)$

متوازيان احسب كلا من  $AD$  و  $EC$ .

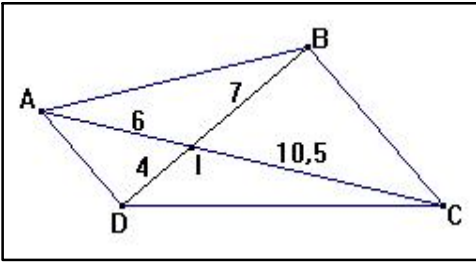


باستعمال معطيات الشكل

المقابل

برهن أن المستقيمين  $(BC)$

و  $(AD)$  متوازيان.



التمرين 2:

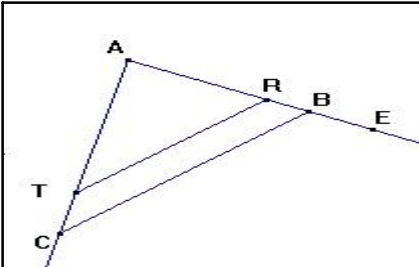
$ABC$  مثلث حيث:  $AB = 6cm$  ،

$AC = 7,2cm$  و  $BC = 10cm$  .

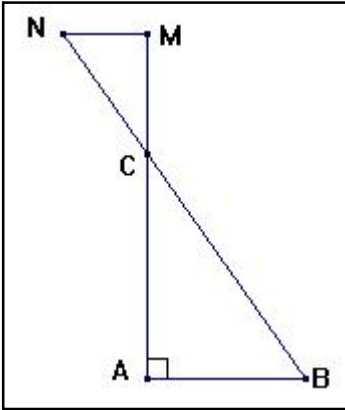
و  $E$  نقطتان

من  $(AB)$  و  $T$  نقطة من  $(AC)$

حيث  $(RT)$  و  $(BC)$



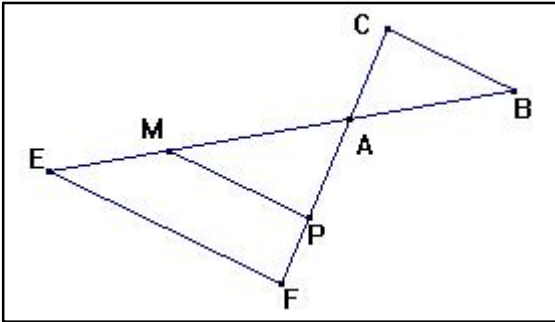
متوازيان ،  $AR = 4,5cm$  و  $BE = 2cm$ .



#### التمرين 4:

$ABC$  مثلث قائم في  $A$  حيث:  $AB = 5$  و  $BC = 13$ . النقط  $M, C, A$  في استقامية و النقط  $N, C, B$  في استقامية كذلك بحيث:  $CM = 2,4$  و  $CN = 2,6$ .

1. أحسب الطول  $AC$ .
2. بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان.
3. أحسب الطول  $MN$ .
4. عين دون إجراء حسابات طبيعة المثلث  $CMN$ .



#### التمرين 5:

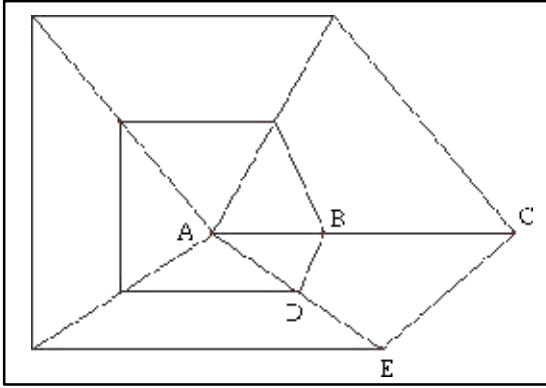
النقط  $E, M, A, B$  في استقامية بهذا الترتيب. النقط  $C, P, F$  في استقامية بهذا الترتيب. المستقيمان  $(EF)$  و  $(MP)$  متوازيان.

$$AM = 6cm, MP = 4,8cm,$$

$$AP = 3,6cm, EF = 6cm,$$

$$AC = 4,5cm, AB = 7,5cm.$$

1. بين أن المثلث  $AMP$  مثلث قائم.
2. أحسب  $AE$  ثم استنتج الطول  $ME$ .
3. بين أن المستقيمين  $(MP)$  و  $(BC)$  متوازيان.
4. استنتج دون إجراء حسابات أن المستقيمين  $(EF)$  و  $(BC)$  متوازيان.



**التمرين 6:** يمثل الشكل المقابل نسيج عنكبوت.

النقط  $E, D, A$  من جهة والنقط  $C, B, A$  من جهة أخرى في استقامية و بنفس الترتيب.

لدينا:  $AD = 10\text{cm}$  ،  $AE = 19\text{cm}$  ،  
 $AB = 16\text{cm}$  ،  $BC = 14,4\text{cm}$ .

1. أحسب  $\frac{AB}{AC}$  و اكتب النتيجة

على شكل غير قابل للاختزال.

2. هل المستقيمان  $(BD)$  و  $(CE)$

متوازيان ؟

## حلول التمارين

### حل التمرين 1

المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متقاطعان في  $E$ .

و بما أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(AD)$  متوازيان

فإن حسب مبرهنة طالس:

$$AD = \frac{6,3}{9} \times 5 \text{ و } EC = \frac{9}{5} \times 3 \text{ و منه } \frac{EC}{3} = \frac{9}{5} = \frac{6,3}{AD} \text{ أي } \frac{EC}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{BC}{AD}$$

نجد بعد الحساب:  $AD = 3,5$  و  $EC = 5,4$ .

### حل التمرين 2

المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متقاطعان في  $I$ .

ترتيب النقط  $C, I, A$  هو نفسه ترتيب النقط  $B, I, D$ . لدينا من جهة أخرى

$$\frac{IC}{IA} = \frac{IB}{ID} = 1,75 \text{ و } \frac{IB}{ID} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ و } \frac{IC}{IA} = \frac{10,5}{6} = 1,75$$

طالس فإن المستقيمين  $(BC)$  و  $(AD)$  متوازيان.

1. بما أن المستقيمين  $(TC)$  و  $(RB)$  يتقاطعان في النقطة  $A$  و بما أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(RT)$  متوازيان فإن مبرهنة طالس

$$\text{تسمح بكتابة: } \frac{AT}{AC} = \frac{AR}{AB} = \frac{TR}{BC}$$

$$\text{و بالتالي: } AT = \frac{AR \times AC}{AB} \text{ و } TR = \frac{AR \times BC}{AB} \text{ أي } AT = \frac{4,5 \times 7,2}{6} = 5,4 \text{ cm}$$

$$\text{و } TR = \frac{4,5 \times 10}{6} = 7,5 \text{ cm}$$

النقط  $A$ ،  $B$  و  $E$  في استقامية بهذا الترتيب و منه  $AE = AB + BE$  أي  $AB = 8 \text{ cm}$ .

2. لدينا من جهة النقط  $A$ ،  $B$  و  $E$  هي بنفس ترتيب النقط  $A$ ،  $T$  و  $C$ .

و لدينا من جهة ثانية  $\frac{AB}{AE} = \frac{AT}{AC}$  لأن  $\frac{AB}{AE} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  و  $\frac{AT}{AC} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{3}{4}$  و بالتالي حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(BT)$  و  $(EC)$  متوازيان.

1. لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم  $ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

و منه  $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 169 - 25 = 144$  أي  $AC = 12$  و بالتالي

$$AC = \sqrt{144}$$

و هكذا نجد  $AC = 12$ .

2. المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متقاطعان في النقطة  $C$ . النقط  $M$ ،  $C$  و  $A$  هي بنفس

$$\text{ترتيب النقط } N، C و B \text{ و لدينا } \frac{CA}{CM} = 5 \text{ و } \frac{CB}{CN} = 5 \text{ أي } \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN}$$

و هكذا حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان.

3. المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متقاطعان في النقطة  $C$ . نقطة  $M$  من  $(CA)$  و  $N$

نقطة من  $(CB)$  و المستقيمان  $(AB)$  و  $(MN)$  متوازيان. لدينا حسب مبرهنة طالس

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \text{ و منه } \frac{AB}{MN} = 5 \text{ وهكذا فإن } MN = \frac{AB}{5}$$

و بالتالي  $MN = 1$ .

4. بما أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  فإن المستقيم  $(AM)$  عمودي على

المستقيم  $(AB)$

و بما أن المستقيم  $(AB)$  يوازي المستقيم  $(MN)$  فإن المستقيم  $(AM)$  عمودي كذلك على المستقيم  $(MN)$  نستنتج هكذا أن المثلث  $CMN$  قائم في النقطة  $M$ .

### حل التمرين 5

1. لدينا من جهة:  $AM^2 = 6^2 = 36$  و لدينا من جهة ثانية:

$$.MP^2 + PA^2 = 36 \text{ إي } MP^2 + PA^2 = (4,8)^2 + (3,6)^2$$

و بالتالي فإن:  $AM^2 = MP^2 + PA^2$

نستنتج حسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث  $AMP$  مثلث قائم في النقطة  $P$ .  
2. المستقيمان  $(AE)$  و  $(AF)$  متقاطعان في النقطة  $A$ .  $M$  نقطة من  $(AE)$  و  $P$  نقطة من  $(AF)$  و بالإضافة إلى ذلك فإن المستقيمين  $(EF)$  و  $(MP)$  متوازيان.

$$\text{و منه يكون لدينا حسب مبرهنة طالس } \frac{AM}{AE} = \frac{AP}{AF} = \frac{MP}{EF}$$

$$\text{يعني } \frac{AM}{AE} = \frac{MP}{EF} \text{ و } \frac{6}{AE} = \frac{4,8}{6} \text{ و منه: } AE = \frac{6 \times 6}{4,8} \text{ نجد أن } AE = 7,5 \text{ cm}$$

بما أن النقط  $A, M, E$  في استقامة بهذا الترتيب فإن  $AM + ME = AE$  و بالتالي فإن  $ME = AE - AM$  أي  $ME = 7,5 - 6$  نجد أن  $ME = 1,5 \text{ cm}$ .

3. المستقيمان  $(AM)$  و  $(AP)$  متقاطعان في النقطة  $A$ .  $B$  نقطة من  $(AM)$  و  $C$  نقطة من  $(AP)$ .

نقطة من  $(AP)$ . النقط  $M, A, B$  في استقامة و بنفس ترتيب النقط  $P, A, C$ .

$$\text{و لدينا من جهة ثانية } \frac{AM}{AB} = \frac{6}{7,5} = 0,8 \text{ و } \frac{AP}{AC} = \frac{3,6}{4,5} = 0,8 \text{ أي } \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(MP)$  و  $(BC)$  متوازيان.

4. المستقيمان  $(EF)$  و  $(BC)$  يوازيان نفس المستقيم  $(MP)$  فهما إذن متوازيان.

### حل التمرين 6

$$1. \text{ و بما أن } \frac{AB}{AC} = \frac{16}{16+14,4} = \frac{16}{30,4} = \frac{160}{304}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{10}{19} \text{ إذن } \frac{AB}{AC} = \frac{16 \times 10}{16 \times 19} = \frac{10}{19} \text{ فإن } PGCD(304; 160) = 16$$

2. المستقيمان  $(AC)$  و  $(AE)$  متقاطعان في النقطة  $A$ .  $B$  نقطة من  $(AC)$  و  $D$  نقطة من  $(AE)$ .

نقطة من  $(AE)$ . النقط  $A, B, C$  في استقامة و بنفس ترتيب النقط  $A, D, E$ .

$$\text{و لدينا } \frac{AB}{AC} = \frac{10}{19} \text{ و } \frac{AD}{AE} = \frac{10}{19} \text{ و منه } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(BD)$  و  $(CE)$  متوازيان.

## حساب المثلثات في المثلث القائم

# 9

أتذكر الأهم:

**24. النسب المثلثية في مثلث قائم**

**تعاريف:** مثلث قائم في النقطة  $A$ .

و لنكن مثلا  $\hat{B}$  إحدى زواياه الحادة. يسمى  $[AC]$  الضلع المقابل لـ  $\hat{B}$  بينما يسمى  $[AB]$  الضلع المجاور لـ  $\hat{B}$ . نعرف الثلاث نسب التالية:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} , \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} , \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

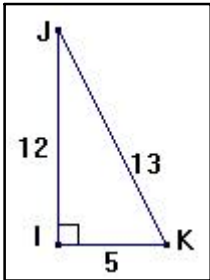
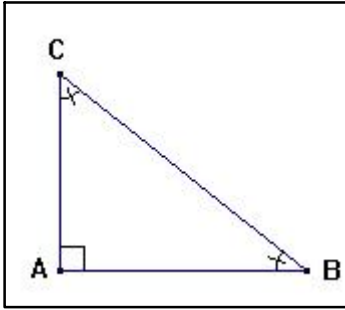
**مثال:** مثلث قائم في النقطة  $I$  حيث  $IJ = 12\text{cm}$  ،  $IK = 5\text{cm}$  و  $JK = 13\text{cm}$ . لدينا:

$$\tan \hat{J} = \frac{5}{12} , \quad \cos \hat{J} = \frac{12}{13} , \quad \sin \hat{J} = \frac{5}{13} \quad \bullet$$

$$\tan \hat{K} = \frac{12}{5} , \quad \cos \hat{K} = \frac{5}{13} , \quad \sin \hat{K} = \frac{12}{13} \quad \bullet$$

**ملاحظات:**

• جيب إحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم يساوي جيب تمام الزاوية



الأخرى.

- جيب و جيب تمام زاوية حادة هي أعداد محصورة بين العددين 0 و 1.

## 25. العلاقات بين النسب المثلثية

إذا كان  $x$  قياسا لإحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم فإن:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

**مثال:** لنعين مثلا  $\cos 60^\circ$  علما أن  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا:  $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$  و منه  $\cos^2 60^\circ = 1 - \sin^2 60^\circ$

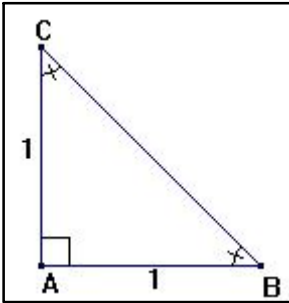
## تمارين ومسائل

و هكذا نجد  $\cos^2 60^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$  و بالتالي  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

التمرين 1:

## أدرب:

أنشئ باستعمال مسطرة غير مدرجة و مدور زاوية قياسها  $a$  علما أن  $\sin a = 0,6$ .

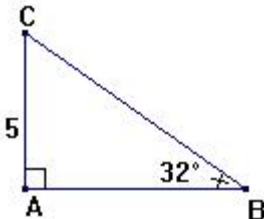


باستعمال مثلث قائم  $ABC$  في النقطة  $A$  حيث  $AB = AC = 1\text{cm}$  عين القيم المضبوطة لكل من  $\sin 45^\circ$  ،  $\cos 45^\circ$  و  $\tan 45^\circ$ .

التمرين 2:

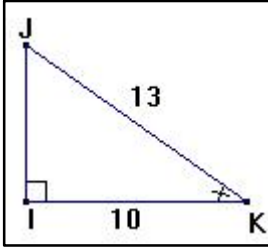
$ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$  حيث  $AC = 5\text{cm}$  و  $\angle B = 32^\circ$ . أحسب قيمة مقربة إلى 0,01 لكل من  $BC$  و  $AB$ .

التمرين 3:



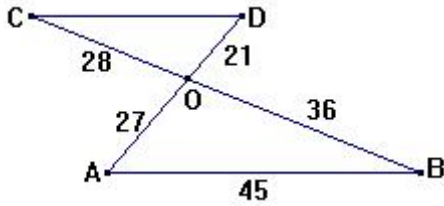
التمرين 4:

$IJK$  مثلث قائم في النقطة  $I$  حيث  $IK = 10\text{cm}$  و  $JK = 13\text{cm}$ .  
عين المدور إلى  $10^{-2}$  لقيس الزاوية  $\hat{K}$ .



## أنمي كفاءاتي:

مسألة:



المستقيمان  $(AD)$  و  $(BC)$   
متقاطعتان في  $O$ .  
حيث:

$$OD = 21\text{cm}, OA = 27\text{cm}, AB = 45\text{cm}$$

$$OC = 28\text{cm}, OB = 36\text{cm}$$

1. برهن أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$

متوازيان.

2. أحسب الطول  $CD$ .

3. أثبت أن المثلث  $AOB$  قائم.

4. عين قيس الزاوية  $\hat{ABO}$  بالتقريب إلى الوحدة من الدرجة.

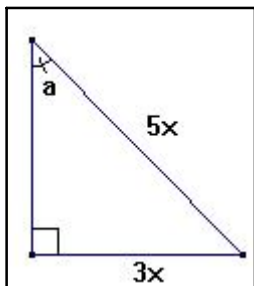


## حلول التمارين و المسائل

### حل التمرين 1

نعلم أن  $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$  و منه  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

ننشئ مثلثا قائما وتره  $5x$  و طول أحد ضلعي الزاوية القائمة هو  $3x$  بحيث  $x$  عدد موجب ( طول ) معطى.



### حل التمرين 2

بما أن  $AB = AC$  فإن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين و قائم في  $A$  و بالتالي فإن  $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$ .

لدينا:  $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ . لنحسب القيمة المضبوطة لـ  $BC$  و ذلك

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث  $ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ أي } BC^2 = 1+1=2 \text{ و منه } BC = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{ نجد هكذا أن } \cos \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و بالتالي فإن } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ و يمكن أن نثبت بنفس الطريقة أن } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ لدينا مثلا من جهة أخرى } \tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1 \text{ و بالتالي } \tan 45^\circ = 1$$

### حل التمرين 3

$$\text{ لدينا } \sin 32^\circ = \frac{5}{BC} \text{ و بالتالي فإن } BC = \frac{5}{\sin 32^\circ}$$

نجد باستعمال آلة حاسبة  $BC \approx 9,43 \text{ cm}$ . لدينا من جهة ثانية

$$\tan 32^\circ = \frac{5}{AB} \text{ و منه } AB = \frac{5}{\tan 32^\circ} \text{ نجد باستعمال آلة حاسبة } AB \approx 8,00 \text{ cm}$$

### حل التمرين 4

$$\text{ لدينا } \cos \hat{K} = \frac{10}{13} \text{ ثم باستعمال آلة حاسبة نجد: } \hat{K} = 39,72^\circ$$

1. المستقيمان  $(BC)$  و  $(AD)$  متقاطعتان في  $O$ . النقط  $C, O, B$  في

استقامية و بنفس ترتيب النقط  $D, O, A$ .

$$\text{لدينا: } \frac{OD}{OA} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \text{ و } \frac{OC}{OB} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \text{ و هكذا فإن } \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB}$$

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.

2. المستقيمان  $(BC)$  و  $(AD)$  متقاطعان في  $O$ . نقطة من  $(OA)$  و  $C$  نقطة

من  $(OB)$ . و بالإضافة إلى ذلك المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.

و منه حسب مبرهنة طالس فإن:  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$ . لدينا هكذا  $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$  و بالتالي

$$\frac{9}{7} = \frac{45}{CD} \text{ و منه } CD = \frac{7 \times 45}{9} \text{ و هكذا نجد } CD = 35 \text{ cm}$$

3. لدينا في المثلث  $AOB$ :  $AB^2 = 45^2 = 2025$  من جهة

و  $OA^2 + OB^2 = 27^2 + 36^2 = 2025$  من جهة ثانية و منه  $OA^2 + OB^2 = AB^2$

نستنتج حسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث  $AOB$  قائم في النقطة  $O$ .

4. في المثلث القائم  $AOB$  لدينا:  $\tan \angle ABO = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$  و منه و باستعمال آلة حاسبة نجد

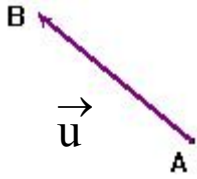
$$\angle ABO \approx 37^\circ$$

أتذكر الأهم:

## 26. مفهوم الشعاع

**تعريف:** الانسحاب الذي يحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  يعرف شعاعاً نرسم إليه بالرمز  $\overrightarrow{AB}$ . و غالباً ما نكتب  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . يعرف الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  بـ:

- منحاؤه و هو منحنى المستقيم  $(AB)$ .



اتجاهه و هو من  $A$  نحو  $B$ .

طوله و هو طول القطعة  $[AB]$ .

**ملاحظة:** الانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  هو الانسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $B$ .

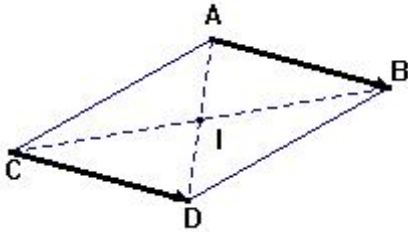
## 3. تساوي شعاعين

**تعريف:** الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المنحنى، نفس الطول و نفس الاتجاه.

يعني  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  متوازي أضلاع.

يعني  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  للقطعتين  $[BC]$  و  $[AD]$

نفس المنتصف  $I$ .



**ملاحظة:**  $I$  منتصف  $[AB]$  يعني  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

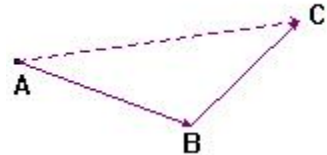
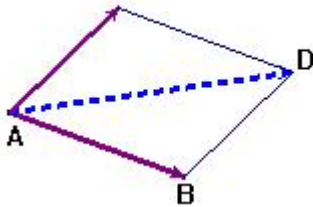
## 4. تركيب انسحابين - مجموع شعاعين

علاقة شال

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

قاعدة متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

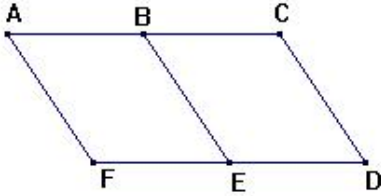


حالة خاصة:  $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \vec{0}$ . نقول أن  $\overline{BA}$  هو معاكس  $\overline{AB}$  و نكتب:

## تمارين

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

### أدرب:



التمرين 1:  $ABEF$  و  $BCDE$  متوازيًا أضلاع.  $B$  منتصف  $[AC]$  و  $E$  منتصف  $[DF]$ .

باستعمال فقط نقط الشكل المقابل عين:

شعاعا يساوي الشعاع  $\overline{BA}$  و شعاعا

يساوي الشعاع  $\overline{EC}$ .

شعاعا منحاه يختلف عن منحى الشعاع  $\overline{FD}$ .

صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{CD}$ .

شعاعا يساوي الشعاع  $\overline{FB} + \overline{BC}$  و شعاعا يساوي الشعاع  $\overline{AB} + \overline{AF}$ .

التمرين 2: أنشئ مثلثا  $ABC$  ثم عين نقطة كيفية  $D$  على  $[BC]$ .

أنشئ النقطة  $E$  التي تحقق  $\overline{CE} = \overline{DA}$ .

أنشئ النقطة  $F$  التي تحقق  $\overline{AF} = \overline{AC} + \overline{AD}$ .

التمرين 3:  $A, B, C$  3 نقط من المستوي حيث:  $AB = 5\text{cm}$  ،  $AC = 4\text{cm}$  و

$BC = 6\text{cm}$ .

أنشئ المثلث  $ABC$ .

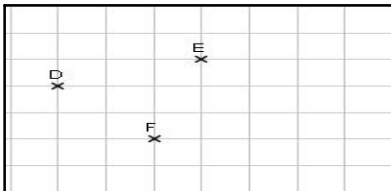
أنشئ النقطة  $M$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{BC}$ .

أعط شعاعا يساوي الشعاع  $\overline{MA}$ .

أنشئ النقطة  $K$  التي تحقق  $\overline{CK} = \overline{CA} + \overline{CB}$ .

برهن أن  $\overline{MA} = \overline{AK}$ . ماذا تستنتج

بالنسبة للنقطة  $A$  ؟



التمرين 4:

$DEF$  مثلث.

أنشئ النقطة  $G$  صورة النقطة  $F$   
 بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{DE}$   
 أنشئ النقطة  $H$  نظيرة النقطة  $G$  بالنسبة إلى النقطة  $F$ .  
 3. ما هي طبيعة الرباعي  $DEFH$  ؟ علل.

## حلول التمارين

### حل التمرين 1

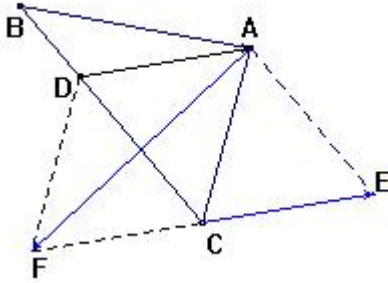
لدينا  $\overline{BA} = \overline{EF} = \overline{CB} = \overline{DE}$  بينما  $\overline{EC} = \overline{FB}$ .  
 لدينا عدة أشعة منحاهما يختلف عن منحنى  $\overline{FD}$  مثال:  $\overline{EC}$ ،  $\overline{BE}$  ...  
 لدينا  $\overline{AF} = \overline{CD}$  و منه صورة بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{CD}$  هي النقطة

$F$ .

باستعمال علاقة شال نجد:  $\overline{FB} + \overline{BC} = \overline{FC}$  بينما باستعمال قاعدة متوازي

الأضلاع نجد:  $\overline{AB} + \overline{AF} = \overline{AE}$ .

### حل التمرين 2



أنظر الشكل المقابل.

النقطة  $E$  هي صورة

النقطة  $C$  بالانسحاب

الذي شعاعه  $\overline{DA}$ . و منه فإن  $ADCE$  متوازي أضلاع.

يتم إنشاء النقطة  $F$  بحيث يكون  $ADFC$  متوازي أضلاع.

### حل التمرين 3

أنظر الشكل المقابل.

لدينا  $\overline{AM} = \overline{BC}$

و منه فإن

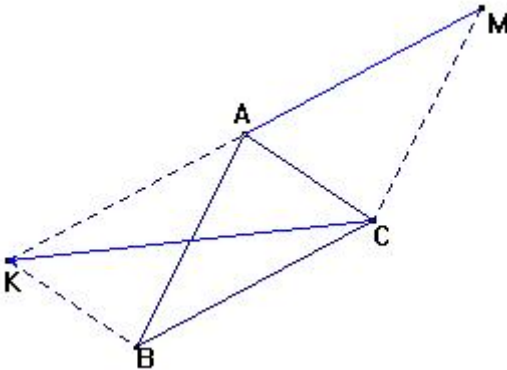
الرباعي  $ABCM$  متوازي أضلاع.

من  $\overline{AM} = \overline{BC}$  نستنتج أن

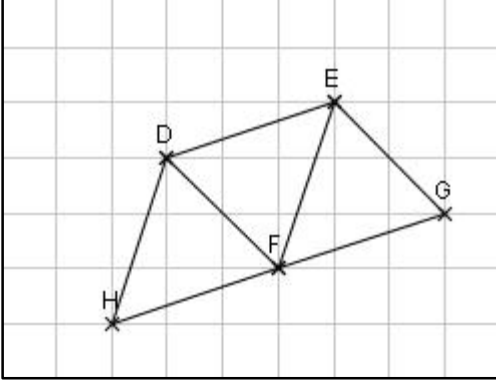
$\overline{MA} = \overline{CB}$  و منه  $-\overline{MA} = -\overline{CB}$

باستعمال قاعدة متوازي

الأضلاع ننشئ



النقطة  $K$  بحيث يكون  $ABCK$  متوازي أضلاع.  
 لدينا من السؤال 3  $\overline{MA} = \overline{CB}$  و بما أن  $ABCK$  متوازي  
 أضلاع فإن  $\overline{CB} = \overline{AK}$ .  
 من  $\overline{MA} = \overline{CB}$  و  $\overline{CB} = \overline{AK}$  نستنتج أن  $\overline{MA} = \overline{AK}$ . النقطة  $A$  هي منتصف  $[KM]$ .



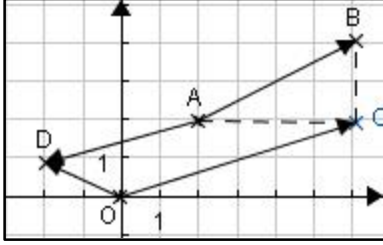
حل التمرين 4

لدينا  $\overline{FG} = \overline{DE}$   
 و بالتالي فالرباعي  $DEFG$  متوازي أضلاع.  
 النقطة  $F$  هي منتصف القطعة  $[GH]$   
 لدينا من السؤال 1:  $\overline{DE} = \overline{FG}$   
 و بما أن  $F$  هي منتصف القطعة  $[GH]$  فإن  $\overline{FG} = \overline{HF}$  و منه نستنتج أن:  $\overline{DE} = \overline{HF}$   
 و بالتالي فالرباعي  $DEFH$  متوازي أضلاع.

نصيحة

أبعد وسائل التسلية و الترفيه عن  
 مكان المذاكرة.

أتذكر الأهم:



5. قراءة إحداثيي شعاع في معلم

مثال: نقرأ في الشكل المقابل:

$$\vec{AB}(4;2) , \vec{BC}(0;-2) , \vec{AC}(4;0) , \vec{AD}(-4;-1) , \vec{OC}(6;2) , \vec{OD}(-2;1)$$

6. تمثيل شعاع بمعرفة إحداثييه

مثال: لقد تم في الشكل المقابل تمثيل الأشعة التالية:

$$\vec{AB} \text{ حيث } A(1;1) \text{ و } B(4;2)$$

$$\vec{u}(-2;3) , \vec{v}(3;-1) \text{ و } \vec{w}(-2;4)$$

7. حساب إحداثيي شعاع بمعرفة مبدأ و نهاية ممثله.

إذا كانت  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  فإن:

$$\vec{AB} = \sqrt{17} \vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

مثال: إذا كان  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن  $\vec{AB}(-1-3; 3-2)$  و منه  $\vec{AB}(-4;1)$

8. حساب إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  و كانت  $M(x_M; y_M)$  منتصف  $[AB]$  فإن:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال: إذا كانت  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن منتصف  $[AB]$  هي النقطة  $M\left(\frac{3-1}{2}; \frac{2+3}{2}\right)$

$$\text{و منه } M\left(1; \frac{5}{2}\right)$$

9. حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

في معلم متعامد و متجانس إذا كانت  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال: إذا كانت  $A(3;2)$  و  $B(-1;3)$  فإن  $AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2}$

و بالتالي فإن:  $AB = \sqrt{17}$

## تمارين

### أدرب:

**التمرين 1:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ . وحدة الطول هي السننيمتر.

علم النقط  $A(2;3)$  ،  $B(-2;5)$  و  $C(-2;1)$ .

أحسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$ .

أحسب إحداثيي النقطة  $E$  منتصف القطعة المستقيمة  $[BC]$ .

هل المستقيم  $(AE)$  محورا للقطعة المستقيمة  $[BC]$  ؟

عين إحداثيي النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع.

**التمرين 2:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ . وحدة الطول هي السننيمتر.

علم النقط  $A(-2;2)$  ،  $B(1;5)$  ،  $C(5;1)$  و  $D(2;-2)$ .

تحقق أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{DC}$ .

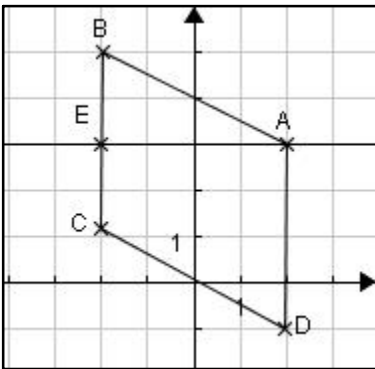
أحسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$  ثم بين أن المثلث  $ABC$  قائم.

ما هي طبيعة الرباعي  $ABCD$  ؟

عين إحداثيي النقطة  $E$  منتصف القطعة  $[AC]$ .

بين أن النقطة  $E$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

### حلول التمارين



أنظر الشكل المقابل.

حل التمرين 1

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad 2.$$

بنفس الطريقة نجد:  $AC = 2\sqrt{5}$  و  $BC = 4$ .

$$3. \text{ لدينا } E\left(\frac{-2-2}{2}; \frac{5+1}{2}\right) \text{ أي } E(-2;3)$$



4. بما أن المستقيم  $(AB)$  يمر من رأس المثلث  $ABC$  والنقطة  $E$  منتصف القطعة  $[BC]$  و بما أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين في  $A$  فإن  $(AE)$  محور للقطعة المستقيمة  $[BC]$ .

5. نفرض أن  $D(x; y)$  و منه  $\overline{AD}(x-2; y-3)$  و لدينا  $\overline{BC}(0; -4)$ .

$$\begin{cases} x-2=0 \\ y-3=-4 \end{cases} \text{ أي } \overline{AD} = \overline{BC} \text{ يعني } ABCD \text{ متوازي أضلاع}$$

نجد هكذا أن  $D(2; -1)$ .

## حل التمرين 2

أنظر الشكل المقابل.

يكفي أن نبين أن  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .  
لدينا:

$\overline{AB}(1+2; 5-2)$  أي  $\overline{AB}(3; 3)$  و لدينا:

$\overline{DC}(5-3; 1+2)$  أي  $\overline{DC}(3; 3)$ . و بالتالي:

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$AB = 3\sqrt{2}$  ،  $AC = 5\sqrt{2}$  و  $BC = 4\sqrt{2}$

لدينا:  $AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 50$

و لدينا من جهة ثانية:  $AC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$

و منه:  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . نستنتج حسب عكس

مبرهنة طالس أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

بما أن  $\overline{AB} = \overline{DC}$  فإن  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة

فهو إذن مستطيل.

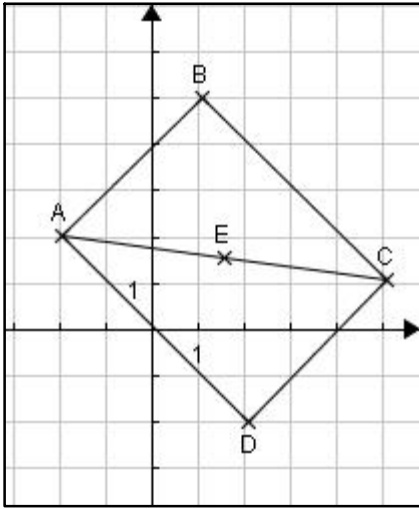
لدينا:  $E\left(\frac{-2+5}{2}; \frac{2+1}{2}\right)$  و منه  $E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  و  $E$  منتصف وتره فهي إذن مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث  $ABC$ . أو باتباع طريقة ثانية يكون لدينا من جهة:  $EA = EC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

و  $EB = \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(5-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$  و هكذا فإن  $EA = EB = EC$  مما يدل

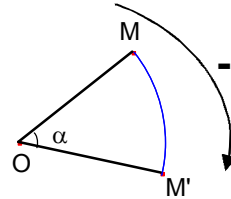
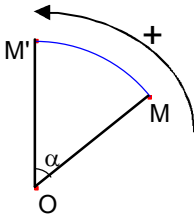
على أن النقطة  $E$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .



أتذكر الأهم:

### 10. الدوران

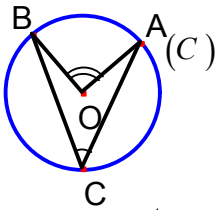
**تعريف:**  $O$  نقطة،  $\alpha$  قيس بالدرجات لزاوية و اتجاه معطى. صورة النقطة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\alpha$  في الاتجاه المعطى هي النقطة  $M'$  بحيث:  $OM' = OM$  و  $\angle MOM' = \alpha^\circ$  ( محسوبة في الاتجاه المعطى ).



$M'$  هي صورة  $M$  في الاتجاه السالب  $M'$  هي صورة  $M$  في الاتجاه الموجب  
**ملاحظة:** دوران مركزه  $O$  و زاويته  $180^\circ$  هو تناظر مركزي مركزه النقطة  $O$ .  
**خواص:** \* الدوران يحافظ على المسافات، على الاستقامية و على أقياس الزوايا.  
 \* الدوران يحول الأشكال الهندسية إلى أشكال تقايسها و لها نفس الخصائص.

### 11. الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية

**تعريف:**



\* الزاوية  $\angle ACB$  زاوية محيطية في الدائرة  $(C)$ .

\* الزاوية  $\angle AOB$  زاوية مركزية في الدائرة  $(C)$ .

\* الزاوية المركزية  $\angle AOB$  و الزاوية المحيطية  $\angle ACB$  تحصران نفس القوس  $AB$  من الدائرة  $(C)$ .

**خواص:** \* قيس زاوية محيطية في دائرة هو نصف قيس

الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

\* كل الزوايا المحيطية في دائرة و التي تحصر نفس القوس متقايسة.

### 12. المضلعات المنتظمة

**تعريف:** المضلع المنتظم هو مضلع كل زواياه متقايسة و كل أضلاعه لها نفس الطول.

مثال: المربع هو مضلع منتظم.

خواص:

- \* يسمى مركز الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم مركز المضلع المنتظم.
- \* كل الزوايا المركزية في مضلع منتظم متقايسة.

## تمارين

### أدرب:

**التمرين 1:** نعتبر مثلثا قائما  $ABC$  في النقطة  $A$ .  
أنشئ صورة المثلث  $ABC$  بالدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $90^\circ$  و في الاتجاه الموجب.  
أنشئ صورة المثلث  $ABC$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{AB}$ .

### التمرين 2:

سداسي منتظم  $ABCDEF$  مركزه النقطة  $O$ .

ما هي صورة المثلث  $OEF$

بالتناظر

المركزي مركزه النقطة  $O$  ؟

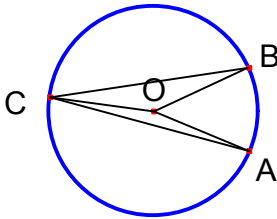
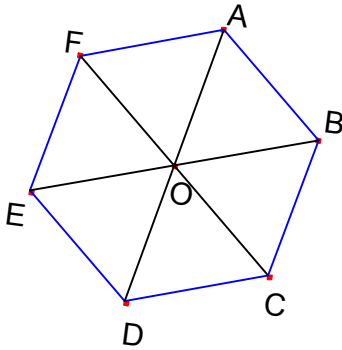
ما هي صورة المثلث  $OAB$  بالتناظر المحوري

الذي محوره المستقيم  $(OB)$  ؟

ما هو قياس كل من الزاويتين  $\widehat{AOB}$  و  $\widehat{ADB}$  ؟

ما هي صورة المثلث  $OAF$  بالدوران الذي

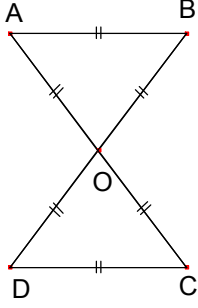
مركزه  $O$  و زاويته  $60^\circ$  في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.



**التمرين 3:** عين مع التبرير أقياس زوايا المثلث  $ABC$  علما أن:  $\widehat{AOB} = 46^\circ$  و  $\widehat{BOC} = 162^\circ$ .

### التمرين 4:

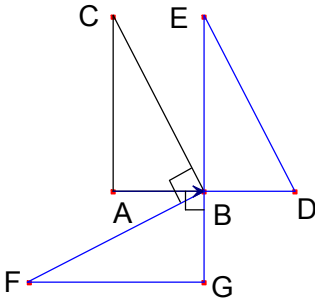
أعد رسم الشكل الآتي علما أن  $OA = 3cm$ .  
بين أن الرباعي  $ABCD$  مستطيل.



أنشئ النقطة  $E$  صورة النقطة  $O$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{BA}$ .  
 أنشئ النقطة  $F$  صورة النقطة  $C$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $60^\circ$  في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.  
 بين أن النقط  $F, E, D, C, B, A$  تنتمي إلى نفس الدائرة.  
 ما نوع الرباعي  $ABFCDE$  ؟  
 عين شعاعا يساوي الشعاع  $\overline{CB} + \overline{CD}$ .

## حل التمارين

حل التمرين 1



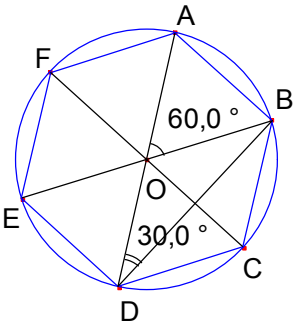
من الواضح أن صورة النقطة  $B$  هي  $B$  نفسها.

صورة النقطة  $A$  هي  $G$  و صورة النقطة  $C$  هي  $F$ .

وبالتالي فصورة المثلث  $ABC$  بالدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $90^\circ$  و في الاتجاه الموجب هو المثلث  $GBF$  القائم في النقطة  $G$ .

صورة النقطة  $A$  هي النقطة  $B$ ، صورة النقطة  $B$  هي النقطة  $D$  و صورة النقطة  $C$  هي النقطة  $E$  و بالتالي فصورة المثلث  $ABC$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{AB}$  هو المثلث  $BDE$  القائم في النقطة  $B$ .

حل التمرين 2



صورة المثلث  $OEF$  بالتناظر الذي مركزه  $O$  هو المثلث  $OBC$ .

صورة المثلث  $OAB$  بالتناظر الذي

محوره  $(OB)$  هو المثلث  $OCB$ .

$$\angle AOB = 60^\circ \text{ و } \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ و بالتالي } \angle ADB = 30^\circ$$

صورة المثلث  $OAF$  بالدوران الذي مركزه  $O$

و زاويته  $60^\circ$  في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة هو المثلث  $OFE$ .

### حل التمرين 3

نعلم أن  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360^\circ$

و بالتالي:  $\angle COA = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC$

أي  $\angle COA = 360 - 46 - 162$  و منه  $\angle COA = 152^\circ$ .

الزاوية المحيطية  $\angle ACB$  و الزاوية المركزية  $\angle AOB$  تحصران نفس القوس و بالتالي فإن:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ أي } \angle ACB = \frac{1}{2} \times 46^\circ \text{ و أخيرا } \angle ACB = 23^\circ.$$

لدينا كذلك قياس الزاوية  $\angle BAC$  هو نصف قياس الزاوية  $\angle BOC$  و منه  $\angle BAC = 81^\circ$ .

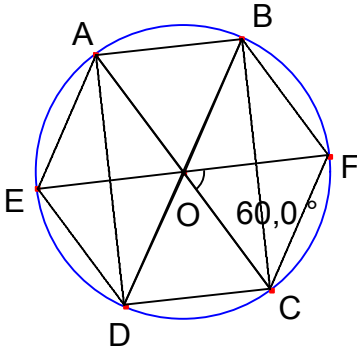
كذلك قياس الزاوية  $\angle EBA$  هو نصف قياس الزاوية  $\angle EOA$  و منه  $\angle EBA = 76^\circ$ .

نتحقق أن مجموع أقياس زوايا مثلث هي  $180^\circ$ :  $23 + 81 + 76 = 180$ .

### حل التمرين 4

أنظر الشكل المقابل.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ و منه حسب عكس}$$



مبرهنة

طالس فإن  $(AB) \parallel (CD)$  و بما أن  $AB = CD$

فإن  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن قطريه

متقايسان فإن  $ABCD$  مستطيل.

أنظر الشكل.

أنظر الشكل.

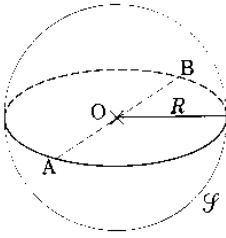
$OA = OB = OC = OD = OE = OF$  لأن  $OE = BA = OA$  و  $OF = OC$ .

$ABFCDE$  سداسي منتظم.

$$\overline{CB} + \overline{CD} = \overline{CA}$$

أتذكر الأهم:

13. الكرة و الجلة



**تعريف:** \* الكرة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  هي مجموعة كل النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM = R$ .  
 \* يسمى داخل الكرة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  الجلة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$ .  
 \* الجلة التي مركزها النقطة  $O$  و نصف قطرها  $R$  هي مجموعة كل النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM \leq R$ .

14. مساحة الكرة - حجم

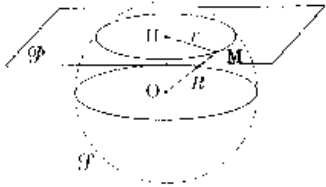
مساحة كرة نصف قطرها  $R$  هي:  $A = 4\pi R^2$ .

حجم جلة نصف قطرها  $R$  هو:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

**مثال:** \* مساحة كرة نصف قطرها  $\sqrt{3}cm$  هو:  $A = 12\pi cm^2$

\* حجم جلة نصف قطرها  $\sqrt{3}cm$  هو:  $V = 4\pi\sqrt{3}cm^3$

15. المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة



**تعريف:** يسمى تقاطع مستو بمجسم مقطعا مستويا لهذا المجسم.

**مثال:** مقطع كرة نصف قطرها  $r$  بحيث  $OH \leq r$

بمستو هو دائرة نصف قطرها  $\sqrt{r^2 - OH^2}$ .

$H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $O$  على المستوي.

16. التكبير و التصغير

**تعريف:** إذا ضربنا كل أبعاد مجسم بعدد موجب  $k$  نكون قد قمنا بتكبيره إذا كان  $k > 1$  و بتصغيره إذا كان  $0 < k < 1$ . يسمى العدد  $k$  معامل أو سلم التكبير ( التصغير ).

**خواص:** \* التكبير و التصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.

\* التكبير و التصغير يحافظان على الزوايا.

\* إذا قمنا بتكبير أو تصغير مجسم بتكبير أو تصغير معاملته  $k$  فإن:

أبعاده تضرب في العدد  $k$ .

مساحته تضرب في العدد  $k^2$ .

حجمه يضرب في العدد  $k^3$ .

## أُتدرب:

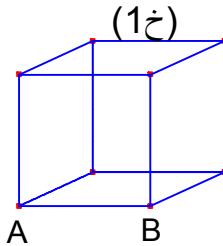
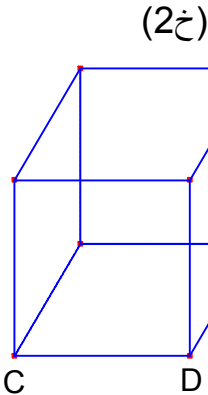
**التمرين 1:** تغطي البحار و المحيطات حوالي  $70^\circ$  من مساحة سطح الكرة. أحسب بـ  $km^2$  المساحة التي تغطيها القارات (مدورة إلى الوحدة) إذا اعتبرنا الكرة الأرضية كرة نصف قطرها  $6730 km$ .

**التمرين 2:** احسب بـ  $cm^3$  الحجم  $V$  لكرة السلة إذا اعتبرناها كرة نصف قطرها  $R = 12 cm$ .

نقبل أن كرة المضرب عبارة عن كرة نصف قطرها  $R' cm$  و هي بهذا الشكل تصغير لكرة السلة بحيث أن معامل التصغير هو  $\frac{4}{15}$ .

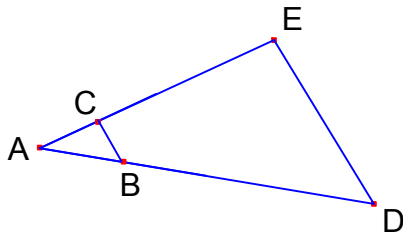
أحسب  $R'$ .  
باستعمال طريقتين مختلفتين أحسب بـ  $cm^3$  الحجم  $V'$  لكرة المضرب. ملاحظة: يتم تدوير النتائج إلى الوحدة.

**التمرين 3:** (1خ) و(2خ) خزانان للمياه على شكل مكعب حيث:  $CD = 1,5AB$ .



أحسب حجم الخزان (1خ)  
علما أن حجم الخزان (2خ) هو  $843,75 l$

إذا لزمنا  $3 kg$  من الطلاء لصبغ الخزان (1خ) كم يلزمنا من الطلاء لصبغ الخزان (2خ) علما أن كتلة الطلاء و المساحة المصبوغة متناسبان.



**التمرين 4:**  $ADE$  مثلث مساحته  $112 cm^2$ .

$B$  نقطة من  $[AD]$  حيث  $AB = 0,25 \times AD$

$C$  نقطة من  $[AE]$  حيث  $AC = 0,25 \times AE$

بين أن المستقيمين  $(BC)$  و  $(DE)$

متوازيان.

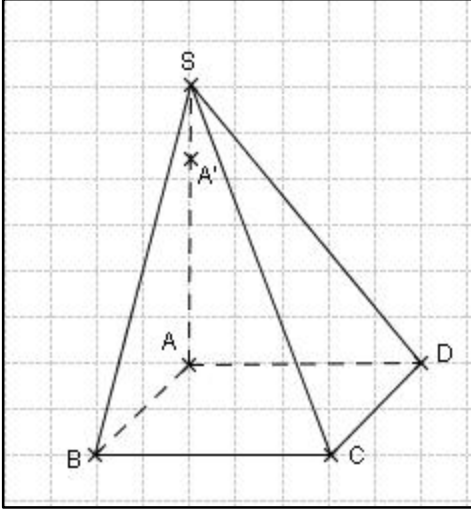
المثلث  $ABC$  تصغير للمثلث  $ADE$ . ما هو سلم التصغير؟

أحسب مساحة المثلث  $ABC$ .

## أنمي كفاءاتي:

$SABCD$  هرم رأسه  $S$  وقاعدته  
 $ABCD$  مستطيلة الشكل بحيث:

مسألة:



$$SD = 10\text{cm}, AD = 6\text{cm}, SA = 8\text{cm}$$

$$SB = \frac{26}{3}\text{cm} \text{ و } AB = \frac{10}{3}\text{cm}$$

لتكن  $A'$  نقطة من  $[SA]$  بحيث  $SA' = \frac{1}{4}SA$

نقطع الهرم بمستوى يمر من  $A'$  و مواز لقاعدته،  
هذا الأخير يقطع  $[SB]$  في  $B'$  و يقطع  $[SC]$

في  $C'$  و يقطع  $[SD]$  في  $D'$ .

بين أن المثلثين  $SAB$  و  $SAD$  قائمان.

بين أن  $SA$  هي ارتفاع الهرم.

يعتبر  $SA'B'C'D'$  هرم مصغر للهرم  $SABCD$ . ما هو معامل التصغير؟  
ما هي طبيعة  $A'B'C'D'$ ؟ أحسب أبعاده.

## حل التمارين و المسائل

حل التمرين 1

بما أن البحار و المحيطات تغطي نسبة  $70^\circ$  من مساحة الكرة الأرضية  
فإن القارات تغطي نسبة  $30^\circ$  من هذه المساحة.

إذا رمزنا إلى مساحة الكرة الأرضية بـ  $A$  و إلى المساحة التي تغطيها

$$\text{القارات بـ } A' \text{ يكون لدينا: } A' = \frac{30}{100} \times A. \text{ نعلم أن } A = 4\pi 6730^2 \text{ و منه}$$

$$A = 181171600\pi \text{ km}^2$$

$$\text{و بالتالي فإن } A' = \frac{3}{10} \times 181171600\pi \text{ km}^2 \text{ أي } A' = 170750210 \text{ km}^2$$



## حل التمرين 2

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ و منه } V = \frac{4}{3}\pi(12)^3 \text{ وهكذا نجد } V \approx 7238 \text{ cm}^3$$

$$\text{ا- } R' = \frac{4}{15}R \text{ و منه } R' = \frac{4}{15} \times 12 \text{ وهكذا نجد } R' = 3,2 \text{ cm}$$

$$\text{ب- * الطريقة 1: } V' = \left(\frac{4}{15}\right)^3 \times V \text{ و منه } V' = \left(\frac{4}{15}\right)^3 \times 7238$$

$$\text{و بالتالي: } V' = 137 \text{ cm}^3$$

$$\text{* الطريقة 2: } V' = \frac{4}{3}\pi R'^3 \text{ و منه } V' = \frac{4}{3}\pi(3,2)^3$$

$$\text{و بالتالي: } V' = 137 \text{ cm}^3$$

## حل التمرين 3

الخران (خ2) هو تكبير للخران (خ1) بحيث أن معامل التكبير هو  $k = 1,5$

نعلم أن  $V_2 = (1,5)^3 \times V_1$  حيث  $V_1$  هو حجم (خ1) و  $V_2$  هو

حجم (خ2)

$$\text{و منه: } V_1 = \frac{V_2}{1,5^3} \text{ بعد الحساب نجد } V_1 = 250 \text{ l}$$

نعلم أن  $A_2 = (1,5)^2 \times A_1$  حيث  $A_1$  هي مساحة (خ1) و  $A_2$  هي مساحة (خ2). أي  $A_2 = 2,25 \times A_1$  و بما أن كتلة الطلاء و المساحة المصبوغة متناسبان يلزمنا إذن  $2,25 \times 3 \text{ kg}$  أي  $6,75 \text{ kg}$  من الطلاء لصبغ الخران (خ2).

## حل التمرين 4

النقط  $A, B, D$  في استقامية و بنفس ترتيب النقط  $A, C, E$  و لدينا:

$$\frac{AB}{AD} = 0,25 \text{ و } \frac{AC}{AE} = 0,25 \text{ أي } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ و منه حسب عكس}$$

مبرهنة طالس المستقيمان  $(BC)$  و  $(DE)$  متوازيان.

لدينا  $AB = 0,25 \times AD$  و بالتالي فإن سلم التصغير هو  $0,25$ .

$$\text{مساحة المثلث } ABC \text{ هي } A = (0,25)^2 \times 112 \text{ cm}^2$$

$$\text{نجد هكذا } A = 7 \text{ cm}^2$$

لدينا  $SA^2 + AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$  و  $SD^2 = 10^2 = 100$  و بالتالي  
 $SA^2 + AB^2 = SD^2$ . نستنتج أن المثلث  $SAD$  قائم في النقطة  $A$ .  
 بنفس الكيفية نثبت إن المثلث  $SAB$  قائم في النقطة  $A$ .

من السؤال الأول نستنتج أن المستقيم  $(SA)$  عمودي على كل من المستقيمين  
 المتقاطعين  $(AB)$  و  $(AD)$  فهو إذن عمودي على المستوي الذي يشملهما و بالتالي فإن  
 $SA$  هي ارتفاع الهرم.

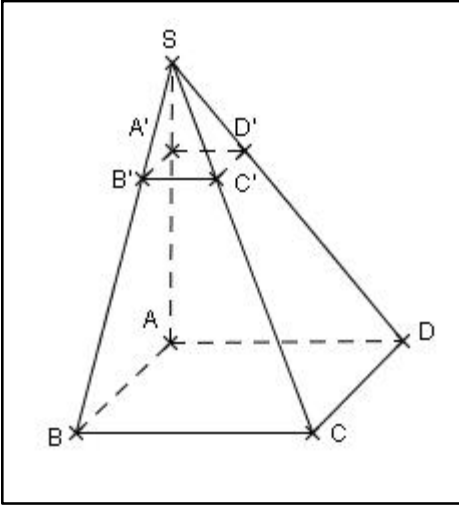
من  $SA' = \frac{1}{4}SA$  نستنتج أن معامل

التصغير هو  $\frac{1}{4}$ .

نعلم أن مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته  
 هو تصغير لقاعدته و بما أن القاعدة مستطيل  
 فإن تصغيرها مستطيل و هكذا فإن  $A'B'C'D'$   
 مستطيل و لدينا بما أن معامل التصغير هو  $\frac{1}{4}$ :

$$A'B' = C'D' = \frac{AB}{4} = \frac{5}{6}cm$$

$$A'D' = B'C' = \frac{AD}{4} = 1,5cm$$



نصيحة

صاحب المجتهدين  
 و المتفوقين.

# مواضيع مقترحة

## الموضوع الأول

الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

أكتب العبارتين  $A$  و  $B$  التاليتين على الشكل  $a\sqrt{b}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيان و  $b$  اصغر ما يمكن.

$$A = \sqrt{6} \times \sqrt{30} \quad \text{و} \quad B = 3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + 11\sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x - 1)^2 + (4x^2 - 1)$ .

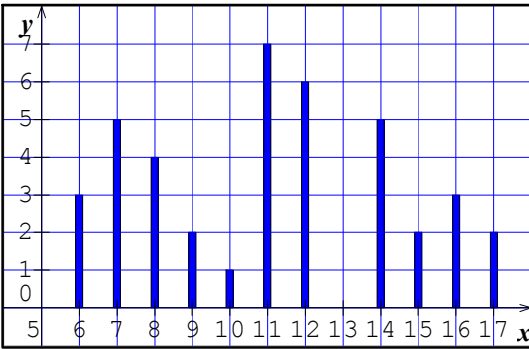
أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

حل العبارة الجبرية  $E$ .

حل المعادلة  $4x(2x - 1) = 0$ .

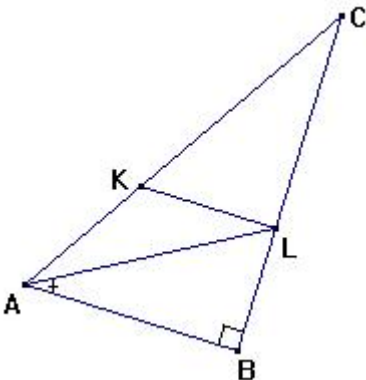
التمرين الثالث:

إليك المخطط بالأعمدة الممثل لتوزيع العلامات المتحصل عليها في اختبار مادة الرياضيات من قبل تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط في إحدى المتوسطات. ما هو عدد تلاميذ هذا القسم؟ ما هو معدل القسم في الاختبار؟ أحسب وسيط هذه السلسلة.



التمرين الرابع:

$ABC$  مثلث قائم في  $B$  بحيث:  $AB = 12cm$  و  $BC = 16cm$ . ننشئ على  $[BC]$  النقطة  $L$  بحيث  $BL = 6cm$  و على  $[AC]$  النقطة  $K$  بحيث  $AK = 7,5cm$ . أحسب الطول  $AC$ .



بين أن المستقيمين  $(KL)$  و  $(AB)$  متوازيان.  
 أحسب القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة لقيس  
 الزاوية  $\angle EAB$  بالدرجات.  
 أحسب الطول  $KL$ .

### الجزء الثاني: مسألة ( 8 نقط )

يقترح أحد نوادي اللأترنتيت على زبائنه خيارين:

الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ  $60DA$  للاستفادة من ساعة واحدة.

الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكا شهريا قيمته  $150DA$  على أن يدفع

مبلغ  $45DA$  للاستفادة من ساعة واحدة.

ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 7 ساعات خلال شهر واحد.

ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 12 ساعة خلال شهر واحد.

نسمي  $x$  عدد الساعات المستفاد منها من قبل زبون خلال شهر واحد و نسمي  $y_1$

المبلغ الشهري المسدد من قبل الزبون في حالة اختياره الخيار الأول بينما نسمي  $y_2$  المبلغ  
 الذي سدده إذا فضل الخيار الثاني.

عبر عن كل من  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

نختار في معلم متعامد الوحدات البيانية التالية:

على محور الفواصل يمثل  $1cm$  ساعة واحدة و يمثل  $1cm$  على محور الترتيب  $100DA$ .

أنشئ في المعلم السابق المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  الممثلين على التوالي للدالتين

$$f_1(x) = 60x \quad \text{و} \quad f_2(x) = 45x + 150$$

اعتمادا على البيان حدد أفضل الخيارين تبعا لعدد الساعات المستفاد منها خلال

شهر واحد.

## الموضوع الثاني

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

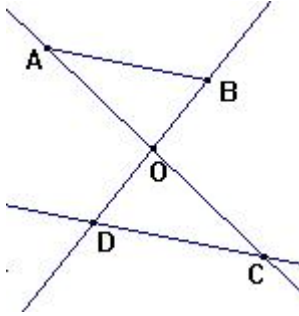
أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 325 و 500 .

أكتب الكسر  $\frac{325}{500}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.

### التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x + 3)(2 - x) + (2x + 3)^2$ .

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .
2. حلل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$ .
3. حل المعادلة  $(2x + 3)(x + 5) = 0$ .



### التمرين الثالث:

في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:

- $OD = 1,2cm$  ،  $OC = 2cm$  ،  $OB = 3cm$  ،  $OA = 5cm$   
بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(DC)$  متوازيان.  
احسب  $AB$  علما أن  $DC = 4cm$

### التمرين الرابع:

$ABC$  مثلث بحيث:  $AB = 8cm$  ،  $AC = 6cm$  و  $BC = 10cm$

بين أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

أحسب  $\tan \widehat{ACB}$  ثم أحسب قياس الزاوية  $\widehat{ACB}$  بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.  
لتكن النقطة  $K$  من  $[AC]$  بحيث  $AK = 2cm$ . المستقيم الموازي للمستقيم  $(AB)$

و المار من النقطة  $K$  يقطع المستقيم  $(BC)$  في نقطة  $L$ . احسب الطول  $BL$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

#### القسم الأول:

مؤسسة تصنع علبا للتصبير، وتقترح نمطين من البيع:

النمط الأول:  $25DA$  للعبة الواحدة.

النمط الثاني:  $15DA$  للعبة الواحدة زائد مبلغ جزافي  $50DA$ .

(1) احسب ثمن 30 علبة و ثمن 50 علبة حسب النمط الأول، ثم حسب النمط الثاني.

(2) نرسم  $x$  إلى عدد العلب المنتجة، عبر بدلالة  $x$  عن ثمنها حسب كل من النمطين.

(3) لتكن  $P_1(x) = 25x$  و  $P_2(x) = 15x + 50$

أنشئ في معلم متعامد المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  الممثلين للدالتين  $P_1$  و  $P_2$  على

الترتيب، (نأخذ على محور الفواصل  $0,5cm$  لكل علبة وعلى محور التراتيب  $1cm$  لكل

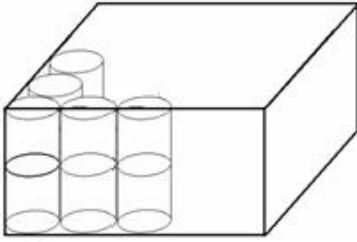
$(100DA)$

- 4) بقراءة بيانية بسيطة أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:  
 أ) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن شراءها بـ 500DA ؟  
 ب) من أجل أي عدد من العلب يكون الثمنان متساويين ؟  
 ج) ما هو الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة إلى المشتري ؟

### القسم الثاني:

تصنع كلّ علبة على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها 5cm وارتفاعها 20cm ، ويغلف كلّ سطحها الجانبي بورقة إشهارية.

- 1) احسب القيمة المضبوطة لمساحة هذه الورقة، والقيمة المقربة بأخذ  $\pi = 3,14$ .
- 2) احسب سعة كلّ علبة بالسنتيمتر المكعب، ثمّ بالتر.
- 3) توضع العلب في صناديق على شكل متوازي مستطيلات كما هو مبين في الشكل المرفق. ما هي أبعاد كلّ صندوق كي يسع 100 علبة ؟



## الموضوع الثالث

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

#### التمرين الأول:

أكتب على الشكل  $a\sqrt{5}$  حيث  $a$  عدد طبيعي كلا من العددين التاليين:

$$A = \sqrt{12} \times \sqrt{15} \quad \text{و} \quad B = 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{125}$$

تحقق أن العدد  $\frac{A}{B}$  عدد طبيعي.

#### التمرين الثاني:

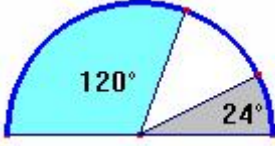
لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (2x + 5)^2 - (x - 2)^2$

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حلل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$

حل المعادلة  $(x + 7)(3x + 3) = 0$

### التمرين الثالث:

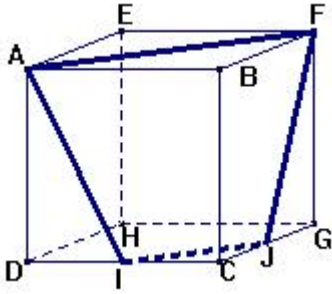


خارجي	
نصف داخلي	
داخلي	

يمثل المخطط نصف الدائري المرفق  
توزيع 630 تلميذ لإحدى المتوسطات  
حسب الصنف.

أحسب قيس الزاوية الموافقة لنصف النصف الداخليين.  
حدد جدول التكرارات و التكرارات النسبية ( التواترات ).

### التمرين الرابع:



$ABCDEFHG$  مكعب طول حرفه  $3\text{cm}$ .  
نعتبر النقطتين  $I$  و  $J$  حيث  $I$  منتصف  
القطعة  $[CD]$  و  $J$  منتصف القطعة  $[CG]$ .  
ما نوع الرباعي  $AIJF$ ؟ برر إجابتك.  
ماذا يمثل هذا الرباعي بالنسبة للمكعب  
 $ABCDEFHG$ ؟  
احسب محيط الرباعي  $AIJF$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

تقترح إحدى المجلات الأسبوعية على زبائنها خيارين لاقتناء مجلاتها:  
الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ  $30DA$  للحصول على مجلة واحدة.  
الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكا سنويا قيمته  $300DA$  على أن يدفع مبلغ  
 $20DA$  للحصول على مجلة واحدة.  
أحسب المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات ثم على 50 مجلة بالنسبة لكل  
خيار.

نسمي  $x$  عدد المجلات التي يتحصل عليها زبون خلال سنة واحدة و ليكن  $y_1$   
المبلغ السنوي المسدد من قبل الزبون في حالة الخيار الأول و  $y_2$  المبلغ المسدد في حالة  
الخيار الثاني.

عبر عن كل من  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$  بحيث  $1\text{cm}$  يمثل 10

مجلات على محور الفواصل بينما  $1\text{cm}$  يمثل  $200DA$  على محور الترتيب.

أنشئ المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  اللذين معادلتاهما:  $y = 30x$  و  $y = 20x + 300$  على  
الترتيب.

باستعمال التمثيل البياني السابق أجب عن الأسئلة التالية:

ما هو أحسن الخيارين إذا اشترى زبون 25 مجلة ؟  
 ما هو المبلغ الذي يجب تسديده للحصول على 60 مجلة ؟  
 بتسديد مبلغ 1200 DA ما هو عدد المجلات المحصل عليها بالنسبة للخيارين ؟  
 حل المتراجحة التالية:  $30x \leq 20x + 300$  ثم عقب على النتيجة.

## الموضوع الرابع

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 147 و 84.  
 لمساعدة التلاميذ المعوزين قامت جمعية أولياء التلاميذ لإحدى المتوسطات بتوزيع 147 كراسا و 84 قلما عليهم بطريقة عادلة على شكل مجموعات متماثلة.  
 \* ما هو أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين من هذه الإعانة ؟  
 \* ما هو عدد الكرايس و عدد الأقلام التي يستفيد منها كل تلميذ ؟

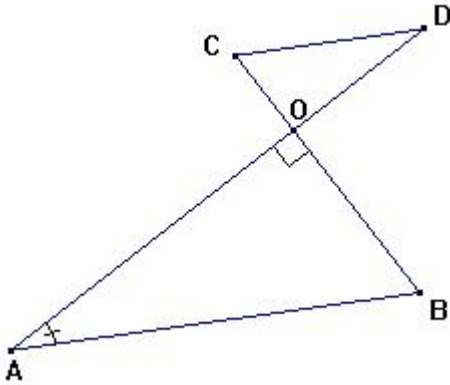
التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية:  $E = (3x - 2)^2 + (3x - 2)(x + 1)$ .

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .

2. حلل العبارة الجبرية  $E$ .

3. حل المعادلة  $E = 0$ .



التمرين الثالث:

في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:

$$OA = 4\sqrt{3} \text{ cm}, OD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$OC = 2 \text{ cm}$$

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ و } \angle OAB = 30^\circ$$

أحسب الطول  $OB$ .

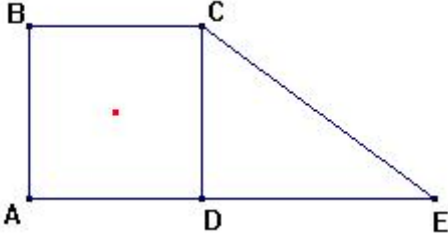
بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$

متوازيان.

التمرين الرابع: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ .



علم النقط  $A(3;2)$  ،  $B(1;4)$  و  $C(-5;-2)$  .  
 أحسب الأطوال  $AB$  ،  $AC$  و  $BC$  ثم بين أن المثلث  $ABC$  قائم.  
 عين إحداثيي النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{BC}$  .  
 ما هي طبيعة الرباعي  $ABCD$  ؟ علل إجابتك.



### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

اشترى أحمد و بومدين قطعتي أرض متجاورتين كما هو موضح في الشكل المقابل علما أن:  $ABCD$  مربع و  $CDE$  مثلث قائم. وحدة الطول هي المتر ( $m$ ) .

الفرع الأول:

دفع أحمد مبلغ  $320000 DA$  ثمن القطعة المربعة  $ABCD$  علما أن ثمن المتر المربع هو  $200 DA$  .

أحسب مساحة قطعة أحمد.

استنتج طول القطعة  $[AB]$  .

دفع بومدين  $250 DA$  للمتر المربع بقصد شراء قطعه.

أحسب مساحة قطعة بومدين إذا علمت أن  $DE = 50 m$  .

استنتج ثمن قطعة بومدين.

الفرع الثاني:

اشترى بومدين من أحمد الجزء  $CDM$  حيث  $M$  نقطة من القطعة المستقيمة  $[DA]$  .

فيما يلي نأخذ:  $AB = 40 m$  ،  $DE = 50 m$  و نضع  $DM = x$  مع  $0 < x < 40$  .

(أ) عبر عن المساحة  $A_{CDM}$  للمثلث  $CDM$  بدلالة  $x$  .

(ب) استنتج المساحة  $F_{ABCM}$  للرباعي  $ABCM$  و المساحة  $G_{CME}$  للمثلث  $CME$

بدلالة  $x$  .

(ج) أحسب قيمة  $x$  التي من أجلها تكون المساحتان  $F_{ABCM}$  و  $G_{CME}$  متساويتين.

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين بـ:

$$f : x \mapsto -20x + 1600 \quad \text{و} \quad g : x \mapsto 20x + 1000$$

حيث  $x$  عدد موجب اصغر من  $40$  .

مثل بيانيا في معلم متعامد الدالتين  $f$  و  $g$  ( نأخذ على الورق المليمترى  $1cm$  لكل

وحدتين على محور الفواصل و  $1cm$  لكل  $200$  وحدة على محور الترتيب ) .

كيف يمكن إيجاد نتيجة السؤال 1- ج باستعمال التمثيلات البيانية للسؤال 2.

باستعمال البيان فقط، أجب عن الأسئلة التالية مع التعليل:  
 ما هي مساحات القطع التابعة لأحمد و ليومدين إذا كانت  $M$  منتصف  
 القطعة  $[DA]$  ؟

ما هي قيمة  $x$  عندما تكون المساحة  $F_{ABCM}$  لقطعة أحمد هي 1500 ؟ ما هي  
 عندئذ المساحة  $G_{CME}$  لقطعة ليومدين ؟

## الموضوع الخامس

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

التمرين الأول:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 185 \\ 3x + 4y = 155 \end{cases} \quad \text{حل الجملة التالية:}$$

لشراء قلمين وخمسة كراريس دفعت أسماء مبلغ  $DA 185$  بينما دفعت بشرى  
 لشراء ثلاثة أقلام و أربعة كراريس مبلغ  $DA 155$ .  
 ما هو سعر القلم الواحد و ما هو سعر الكراس الواحد ؟

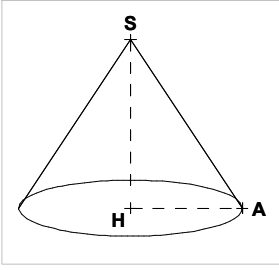
التمرين الثاني:

$$E = (5x - 2)^2 - (2x + 5)^2$$

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية  $E$ .
2. حلل العبارة الجبرية  $E$  إلى جداء عاملين من الشكل  $(ax + b)$
3. حل المعادلة  $(3x - 7)(7x + 3) = 0$ .

التمرين الثالث:

$ABC$  مثلث قائم في النقطة  $A$  بحيث:  $\angle ABC = 50^\circ$  و  $AB = 4cm$ .  
 أحسب الطول  $AC$  ( يتم تدوير النتيجة إلى  $0,1cm$  ).  
 حدد وضعية النقطة  $O$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ . علل إجابتك.  
 عين قيس الزاوية  $\angle AOB$ .



التمرين الرابع:

مخروط دوراني رأسه  $S$ ، ارتفاعه  $[SH]$  و نصف

قطر قاعدته  $[AH]$  بحيث:  $SH = 12\text{cm}$  و  $AH = 8\text{cm}$ .

عين قيس الزاوية  $\widehat{ASH}$  ( يتم تدوير النتيجة إلى  $0,1$  ).

أحسب الطول  $SA$ .

نقوم بتصغير هذا المخروط للحصول على

مخروط جديد ارتفاعه  $h' = 8\text{cm}$ .

أحسب  $V$  حجم المخروط الأول.

أحسب  $k$  معامل ( سلم ) التصغير.

أحسب  $V'$  حجم المخروط المصغر.

**الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)**

يتلقى عامل في مصنع للمحافظ أجرة أسبوعية قدرها  $400DA$  زائد علاوة قدرها

$50DA$  عن كل محفظة ينجزها.

القسم الأول:

نرمز بـ  $x$  لعدد المحافظ المنجزة خلال الأسبوع و بالرمز  $y$  للأجرة الأسبوعية.

1 - أنقل وأكمل الجدول التالي :

$x$	0	2	8	15
$y$				

2- عبر عن  $y$  بدلالة  $x$

3 - مثل بيانيا التطبيق التآلفي  $f$  المعروف بـ:  $f(x) = 50x + 400$

نأخذ  $1\text{cm}$  من أجل 2 وحدات على محور الفواصل و  $1\text{cm}$  من أجل 100 وحدة على

محور الترتيب.

4 - إذا أراد هذا العامل أن تكون أجرته الأسبوعية  $1200DA$  ما هو عدد المحافظ التي

يجب إنجازها في هذا الأسبوع ؟

القسم الثاني:

عادة هذا العامل أجرته الأسبوعية تقدر بـ  $1200DA$ . لكن في أحد الأسابيع وقع له عائق

فلم ينجز إلا 75% من عدد المحافظ المعتادة .

1 - ما هو عدد المحافظ التي أنجزها في هذا الأسبوع ؟

2 - ما هي أجرته في هذا الأسبوع ؟

## تصحيح الموضوع الأول

الجزء الأول:

حل التمرين الأول:

$$A = 6\sqrt{5} \text{ و منه } A = \sqrt{6} \times \sqrt{6 \times 5} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{5} = (\sqrt{6})^2 \times \sqrt{5}$$

$$B = 13\sqrt{2} \text{ و منه } B = 3\sqrt{16 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 2} + 11\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 11\sqrt{2}$$

حل التمرين الثاني:

$$E = 8x^2 - 4x \text{ و منه } E = (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 - 1)$$

لدينا الاختيار بين العبارة الأولى و العبارة الثانية:

$$E = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(2x + 1) = (2x - 1)(2x - 1 + 2x + 1) = 4x(2x - 1) -$$

$$E = 8x^2 - 4x = 4x(2x - 1) -$$

$$4x(2x - 1) = 0 \text{ يعني } 4x = 0 \text{ أو } 2x - 1 = 0 \text{ وهذا يعني } x = 0 \text{ أو } x = \frac{1}{2}$$

للمعادلة حلان هما 0 و  $\frac{1}{2}$ .

حل التمرين الثالث:

عدد تلاميذ القسم هو 40.

ليكن  $\bar{x}$  الوسط الحسابي لهذه السلسلة و هو معدل القسم. لدينا:  $\bar{x} = 11,1$

وسيط هذه السلسلة هو:  $M_e = 11$ .

حل التمرين الرابع:

المثلث  $ABC$  قائم في  $B$  و منه حسب مبرهنة فيثاغورس  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

و بالتالي فإن  $AC^2 = 400$ . نستنتج أن  $AC = 20 \text{ cm}$ .

المستقيمان  $(CA)$  و  $(CB)$  متقاطعان في  $C$ . النقط  $C$ ،  $K$  و  $A$  في استقامية و

بنفس ترتيب النقط  $C$ ،  $L$  و  $B$  و لدينا بالإضافة إلى ذلك  $\frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL}$  لأن:

$$\frac{CB}{CL} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ و } \frac{CA}{CK} = \frac{20}{12,5} = 1,6$$

نستنتج بتطبيق عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(KL)$  متوازيان.

$$\text{لدينا } \tan \angle EAB = \frac{BL}{AB} = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ و منه } \angle EAB = 26^\circ$$

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا  $\frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL} = \frac{AB}{KL} = 1,6$  و بالتالي

$$.KL = 7,5cm \text{ و منه } KL = \frac{AB}{1,6} = \frac{12}{1,6}$$

### حل الجزء الثاني مسألة :

يدفع الزبون في حالة الخيار الأول  $7 \times 60 = 420 DA$  أما في حالة الخيار الثاني يدفع  $7 \times 45 + 150 = 465 DA$  و بالتالي فالخيار الأول أكثر فائدة.  
 يدفع الزبون في حالة الخيار الأول  $12 \times 60 = 720 DA$  أما في حالة الخيار الثاني يدفع  $12 \times 45 + 150 = 690 DA$  و بالتالي فالخيار الثاني أكثر فائدة.  
 $y_2 = 45x + 150$  ،  $y_1 = 60x$



نلاحظ أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 10 و هذا يعني أنه في حالة الخيارين يدفع الزبون نفس المبلغ و الذي هو  $600 DA$ . كما نلاحظ أنه من أجل  $x$  اصغر من 10 يكون المستقيم  $(d_1)$  أسفل المستقيم  $(d_2)$  و بالتالي فإن أفضل الخيارين في هذه الحالة هو الخيار الأول أما من أجل  $x$  أكبر من 10 فإن أفضل الخيارين هو الخيار الثاني.

## تصحيح الموضوع الثاني

الجزء الأول :

حل التمرين الأول:

$$500 = 325 \times 1 + 175$$

$$325 = 175 \times 1 + 150$$

$$175 = 150 \times 1 + 25$$

$$150 = 25 \times 6 + 0$$

لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس

$$. PGCD(500; 325) = 25 \text{ و منه}$$

$$\frac{325}{500} = \frac{13}{20} \text{ و منه } \frac{325}{500} = \frac{13 \times 25}{20 \times 25}$$

حل التمرين الثاني:

$$E = (4x - 2x^2 + 6 - 3x) + (4x^2 + 12x + 9)$$

$$E = 2x^2 + 13x + 15$$

$$E = (2x + 3)(2 - x + 2x + 3)$$

$$E = (2x + 3)(x + 5)$$

$(2x + 3)(x + 5) = 0$  يعني  $2x + 3 = 0$  أو  $x + 5 = 0$  وهذا يعني

$$x = -\frac{3}{2} \text{ أو } x = -5 \text{ و منه للمعادلة حلين هما } -\frac{3}{2} \text{ و } -5.$$

حل التمرين الثالث:

المستقيمان  $(BD)$  و  $(AC)$  متقاطعان في  $O$ . النقط  $D, O$  و  $B$  في استقامية

و بنفس ترتيب النقط  $C, O$  و  $A$  كما أن  $\frac{OA}{OC} = 2,5$  و  $\frac{OB}{OD} = 2,5$  أي  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(DC)$  متوازيان.

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$  و منه  $AB = DC \times \frac{OA}{OC}$

و بالتالي  $AB = 4 \times 2,5$ . نجد هكذا  $AB = 10cm$ .

حل التمرين الرابع :

لدينا  $AB^2 + AC^2 = 100$  و  $BC^2 = 100$  و منه  $AB^2 + AC^2 = BC^2$

نستنتج حسب مبرهنة فيثاغورس أن المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $A$ .

$$\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} \text{ و منه } \tan \angle ACB = \frac{4}{3} \text{ و بالتالي } \angle ACB = 53^\circ$$

$$\text{بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا } \frac{CA}{CK} = \frac{CB}{CL} = \frac{AB}{KL} \text{ و منه } \frac{CL}{CA} = \frac{CB \times CK}{CA}$$

$$\text{نجد هكذا } CL = \frac{20}{3} \text{ cm. لدينا } BL = BC - CL \text{ و منه } BL = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

**حل الجزء الثاني: مسألة**  
**القسم الأول**

ثمن 30 علبة حسب النمط الأول هو  $25 \times 30 = 750$  DA

ثمن 30 علبة حسب النمط الثاني هو  $15 \times 30 + 50 = 500$  DA

ثمن 50 علبة حسب النمط الأول هو  $25 \times 50 = 1250$  DA

ثمن 50 علبة حسب النمط الثاني هو  $15 \times 50 + 50 = 800$  DA

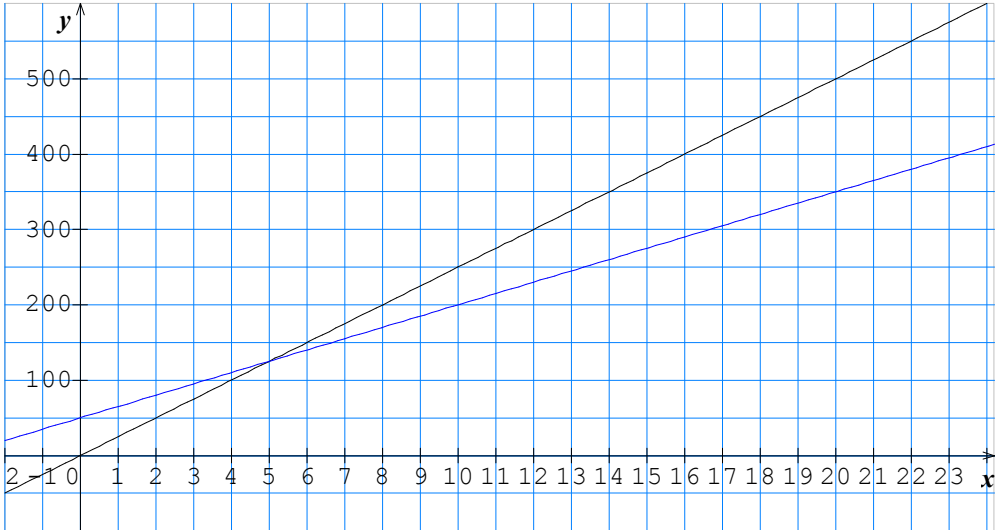
ثمنها حسب النمط الأول هو  $25x$  بينما ثمنها حسب النمط الثاني هو  $15x + 50$ .  
أنظر الرسم المرفق.

(أ) أكبر عدد من العلب التي يمكن شراءها بـ  $500$  DA هو 20 علبة.

(ب) يكون الثمنان متساويين من أجل 5 علب.

(ج) الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة

للمشتري هو ان يكون عدد العلب المشتراة أكبر من 5.



**القسم الثاني:**

القيمة المضبوطة لمساحة الورقة الإشهارية هي  $2\pi \times 5 \times 20 = 200\pi \text{ cm}^2$  بينما

قيمتها المقربة هي  $628cm^2$ .  
 سعة كل عبة هي  $1570cm^3 = 20 \times 5^2 \times \pi$  أي 1,571.  
 $100 = 50 \times 2$  و  $50 = 5 \times 10$  و منه أبعاد الصندوق هي  $40 \times 100 \times 50$ .

## تصحيح الموضوع الثالث

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

#### حل التمرين الأول

$$A = 6\sqrt{5} \text{ و منه } A = \sqrt{4 \times 3} \times \sqrt{3 \times 5} = 2(\sqrt{3})^2 \sqrt{5}$$

$$B = 2\sqrt{5} \text{ و منه } B = 2\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{16 \times 5} + 2\sqrt{25 \times 5} = 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ و منه } \frac{A}{B} = 3 \text{ . إذن } \frac{A}{B} \text{ عدد طبيعي.}$$

#### حل التمرين الثاني

$$E = (4x^2 + 20x + 25) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$E = 4x^2 + 20x + 25 - x^2 + 4x - 4$$

$$E = 3x^2 + 24x + 21$$

$$E = [(2x + 5) - (x - 2)][(2x + 5) + (x - 2)]$$

$$E = (2x + 5 - x + 2)(2x + 5 + x - 2)$$

$$E = (x + 7)(3x + 3)$$

$x = -1$  أو  $x = -7$  أي  $3x + 3 = 0$  أو  $x + 7 = 0$  يعني  $(x + 7)(3x + 3) = 0$   
 للمعادلة حلان هما  $-7$  و  $-1$ .

#### حل التمرين الثالث

نعلم أن قياس زاوية مستقيمة هو  $180^\circ$  و منه قياس الزاوية الموافقة لـ نصف النصف الداخليين هو  $180 - 120 - 24 = 36^\circ$ .  
 باستعمال العلاقة التالية: التكرار هو  $\frac{\alpha^\circ \times 630}{180^\circ}$  نتحصل على مختلف التكرارات



الفئة	داخلي	نصف داخلي	خارجي
الزاوية	24°	36°	120°
التكرار	84	126	420
التواتر	$\frac{84}{630}$	$\frac{126}{630}$	$\frac{420}{630}$

### حل التمرين الرابع

بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث  $CDG$  يكون لدينا:

$(IJ) \parallel (DG)$  و  $DG = 2IJ$  و بما أن  $(DG) \parallel (AF)$  و  $AF = DG$  فإن

$$(1) \quad (AF) \parallel (IJ) \quad \text{و} \quad AF = 2IJ \quad \dots (1)$$

لدينا من جهة ثانية المثلثان  $ADI$  و  $FGJ$  متقايسان و منه  $AI = FJ$  ... (2)  
من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي  $AIJF$  شبه منحرف متساوي الساقين.

الرباعي  $AIJF$  هو مقطع المكعب  $ABCDEFGH$  بالمستوي  $(AFI)$ .

$$IJ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا} \quad AF^2 = AB^2 + BF^2 = 18 \quad \text{و منه} \quad AF = 3\sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{و بالتالي}$$

$$\text{لدينا كذلك} \quad AI^2 = AD^2 + DI^2 = \frac{45}{4} \quad \text{و منه} \quad AI = FJ = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{لدينا} \quad AF + IJ + 2 \times AI = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{5} = 13,06 \text{ cm} \quad \text{و منه} \quad AF + IJ + 2 \times AI = 13,06 \text{ cm}$$

إذن محيط الرباعي  $AIJF$  هو  $13,06 \text{ cm}$ .

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

- \* المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة للخيار 1:  $30 \times 10 = 300 \text{ DA}$
  - \* المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة للخيار 2:  $20 \times 10 + 300 = 500 \text{ DA}$
  - \* المبلغ المسدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة للخيار 1:  $30 \times 50 = 1500 \text{ DA}$
  - \* المبلغ المسدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة للخيار 2:  $20 \times 50 + 300 = 1300 \text{ DA}$
- $$y_2 = 20x + 300, \quad y_1 = 30x$$
- أنظر الرسم المرفق.

أحسن الخيارين في حالة شراء 25 مجلة هو الخيار الأول.

المبلغ المسدد في حالة شراء 60 هو 1800 DA بالنسبة للخيار الأول و هو

1500 DA بالنسبة للخيار الثاني.

عدد المجلات المتحصل عليها بتسديد 1200 DA هو 40 بالنسبة للخيار الأول

و هو 45 بالنسبة للخيار الثاني.

-  $30x \leq 20x + 300$  يعني  $x \leq 30$  و هذا يعني أن أحسن الخيارين هو الأول في

حالة شراء أقل من 30 مجلة أما في حالة شراء أكثر من 30 مجلة فيكون الخيار الثاني الأفضل.



## تصحيح الموضوع الرابع

### الجزء الأول ( 12 نقطة )

#### حل التمرين الأول

$$147 = 84 \times 1 + 63$$

$$84 = 63 \times 1 + 21 \quad \text{لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس}$$

$$63 = 21 \times 3 + 0$$

$$\text{و منه } PGCD(147;84) = 21.$$

\* إذا رمزنا بـ  $n$  إلى أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين فإن العدد  $n$  هو

القاسم المشترك الكبر للعديين 147 و 84. و منه  $n = 21$ .

\* لدينا  $147 \div 21 = 7$  و  $84 \div 21 = 4$  و بالتالي يستفيد كل تلميذ من 7 كراريس

و 4 أقلام.

#### حل التمرين الثاني

$$E = (9x^2 - 12x + 4) + (3x^2 + 3x - 2x - 2)$$

$$E = 9x^2 - 12x + 4 + 3x^2 + 3x - 2x - 2$$

$$E = 12x^2 - 11x + 2$$

$$E = (3x - 2)(3x - 2 + x + 1)$$

$$E = (3x - 2)(4x - 1)$$

$E = 0$  يعني  $(3x - 2)(4x - 1) = 0$  أي  $3x - 2 = 0$  أو  $4x - 1 = 0$  و بالتالي

فإن حلول هذه المعادلة هما  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{1}{4}$ .

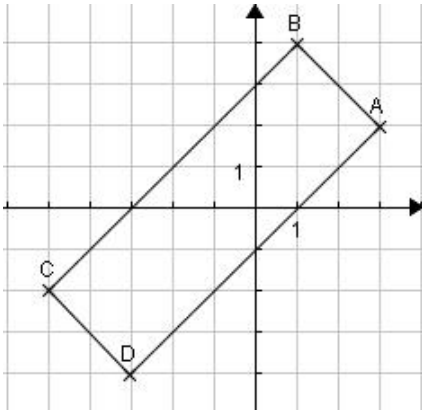
#### حل التمرين الثالث

$$OB = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{وهكذا نجد } OB = OA \times \tan 30^\circ \quad \text{و منه } \tan 30^\circ = \frac{OB}{OA}$$

و بالتالي فإن  $OB = 4cm$ .

المستقيمان  $(AD)$  و  $(BC)$  متقاطعان في  $O$ . النقط  $D$ ،  $O$  و  $A$  في استقامية

و بنفس ترتيب النقط  $C$ ،  $O$  و  $B$  كما أن  $\frac{OA}{OD} = 2$  و  $\frac{OB}{OC} = 2$  أي  $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$  و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.



### حل التمرين الرابع

أنظر الشكل المقابل.

$$\text{لدينا } AC = 4\sqrt{5} \text{ ، } AB = 2\sqrt{2}$$

$$\text{و } BC = 6\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا } AC^2 = 80 \text{ و } AB^2 + BC^2 = 80$$

و منه  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . نستنتج أن

المثلث  $ABC$  قائم في النقطة  $B$ .

$$\text{لدينا } \overline{AD} = \overline{BC} \text{ و } \overline{BC} (-6; -6)$$

$$\text{لدينا } \overline{AD} = \overline{BC} \text{ و } \overline{BC} (-6; -6)$$

إذا فرضنا  $D(x; y)$  يكون لدينا:

$$\begin{cases} x - 3 = -6 \\ y - 2 = -6 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \text{ و منه } D(-3; -4)$$

الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة فهو إذن مستطيل.

### الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

حل الفرع الأول:

مساحة قطعة أحمد هي  $1600 m^2 = 320000 \div 200$  و بما أن القطعة مربعة

الشكل فإن  $AB = \sqrt{1600} m$  و هكذا نجد  $AB = 40 m$ .

مساحة قطعة بومدين هي  $1000 m^2 = \frac{50 \times 40}{2} = \frac{DE \times DC}{2}$  و بالتالي فإن ثمن

قطعة بومدين هو  $DA = 250000 = 1000 \times 250$ .

حل الفرع الثاني:

$$A_{CDM} = \frac{40 \times x}{2} = 20x \text{ (أ)}$$

$$G_{CME} = 1000 + 20x \text{ و } F_{ABCM} = 1600 - 20x \text{ (ب)}$$

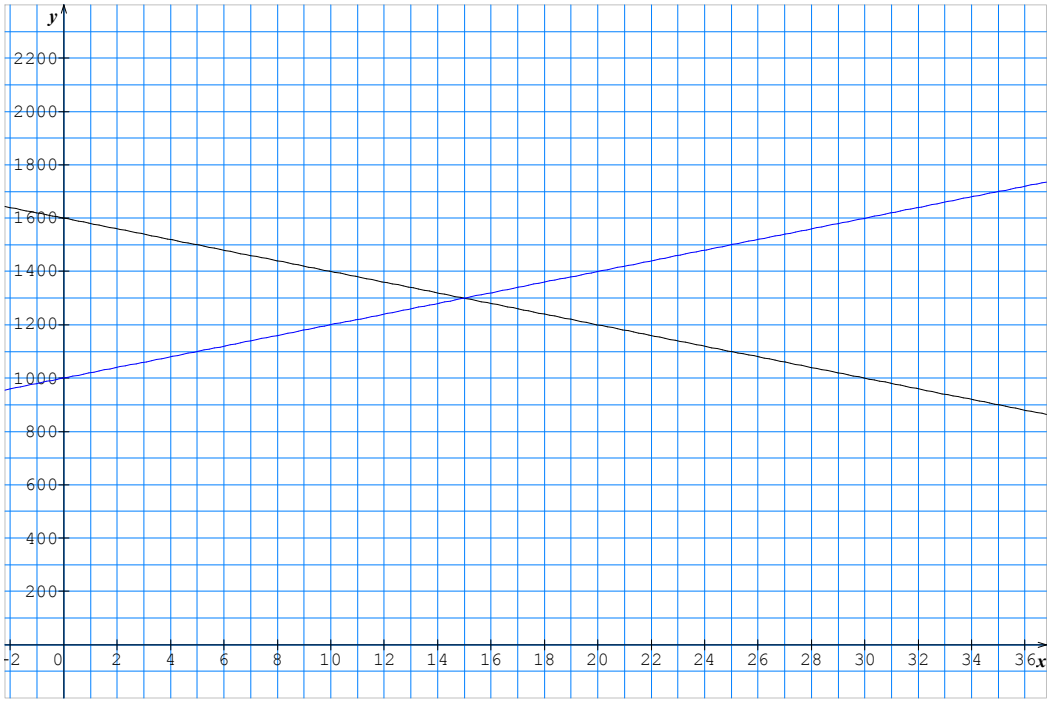
$$F_{ABCM} = G_{CME} \text{ يعني } 1600 - 20x = 1000 + 20x \text{ أي } 40x = 600 \text{ (ج)}$$

و بالتالي  $x = 15$ .

أنظر الرسم المرفق.

قيمة  $x$  في السؤال 1- ج هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لـ  $f$  و  $g$ .

$M$  \* منتصف القطعة  $[DA]$  يعني أن  $x = 20$  و منه فمساحة أحمد هي  $1200m^2$  بينما مساحة بومدين هي  $1400m^2$ .  
 \* تكون  $F_{ABCM} = 1500$  من أجل  $x = 5$  و يكون لدينا  $G_{CME} = 1100m^2$ .



## تصحيح الموضوع الخامس

### لجزء الأول ( 12 نقطة )

حل التمرين الأول:

لحل الجملة  $\begin{cases} 2x + 5y = 185 & (1) \\ 3x + 4y = 155 & (2) \end{cases}$  يمكننا مثلا استعمال طريقة الجمع. بضرب

طرفي (1) في 3 و ضرب طرفي (2) في (-2) نجد:  $\begin{cases} 6x + 15y = 555 & (1') \\ -6x - 8y = -310 & (2') \end{cases}$

من  $(1') + (2')$  ينتج  $7y = 245$  و منه  $y = 35$ . بالتعويض مثلا في المعادلة (1) نحصل على  $2x + 5 \times 35 = 185$  و منه  $2x = 10$  أي  $x = 5$ . للجملة حل وحيد هو الثنائية  $(x; y) = (2; 35)$ .

إذا رمزنا إلى ثمن القلم الواحد بـ  $DA$  و  $x$  و إلى ثمن الكراس الواحد بالرمز  $DA$  و  $y$

$$\text{يكون لدينا: } \begin{cases} 2x + 5y = 185 \\ 3x + 4y = 155 \end{cases} \text{ و حسب السؤال الأول فإن } x = 5 \text{ و } y = 35.$$

و هكذا فإن ثمن القلم هو  $5DA$  و ثمن الكراس  $35DA$ .

**حل التمرين الثاني:**

$$E = (25x^2 - 20x + 4) - (4x^2 + 20x + 25)$$

$$E = 21x^2 - 40x - 21$$

$$E = [(5x - 2) - (2x + 5)][(5x - 2) + (2x + 5)]$$

$$E = (5x - 2 - 2x - 5)(5x - 2 + 2x + 5)$$

$$E = (3x - 7)(7x + 3)$$

$(3x - 7)(7x + 3) = 0$  يعني  $3x - 7 = 0$  أو  $7x + 3 = 0$  و هذا يعني

$$x = \frac{7}{3} \text{ أو } x = -\frac{3}{7}. \text{ إذن للمعادلة حلان هما } \frac{7}{3} \text{ و } -\frac{3}{7}.$$

**حل التمرين الثالث:**

$$\tan 50^\circ = \frac{AC}{AB} \text{ و منه } AC = AB \tan 50^\circ. \text{ نجد هكذا } AC = 4,8 \text{ cm.}$$

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم  $ABC$  هي منتصف وتره و بالتالي

فالنقطة  $O$  هي منتصف القطعة المستقيمة  $[BC]$ .

بما أن قياس الزاوية  $\widehat{ABC}$  هو  $50^\circ$  و علما أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  فإن قياس

الزاوية  $\widehat{ACB}$  هو  $40^\circ$ . في الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  الزاوية المحيطية  $\widehat{ACB}$

و الزاوية المركزية  $\widehat{AOB}$  تحصران نفس القوس و بالتالي فإن  $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$

نستنتج هكذا أن قياس الزاوية  $\widehat{AOB}$  هو  $80^\circ$ .

**حل التمرين الرابع :**

$$\tan \widehat{ASH} = \frac{AH}{SH} \text{ و منه } \tan \widehat{ASH} = 0,66 \text{ و منه } \widehat{ASH} = 33,7^\circ.$$

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = 208 \text{ و منه } SA = \sqrt{208} \text{ cm}$$

نذكر أن حجم مخروط دوراني هو  $\frac{1}{3}\pi R^2 h$  حيث  $h$  الارتفاع و  $R$  نصف قطر

القاعدة.

$$.V \square 804cm^3 \text{ نجد } V = \frac{1}{3}\pi \times AH^2 \times SH$$

$$.k = \frac{2}{3} \text{ لدينا } k = \frac{SH}{h'}$$

$$.V' \square 238cm^3 \text{ نجد } V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V$$

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)  
القسم الأول:

x	0	2	8	15
y	400	500	800	1150

$$y = 50x + 400$$

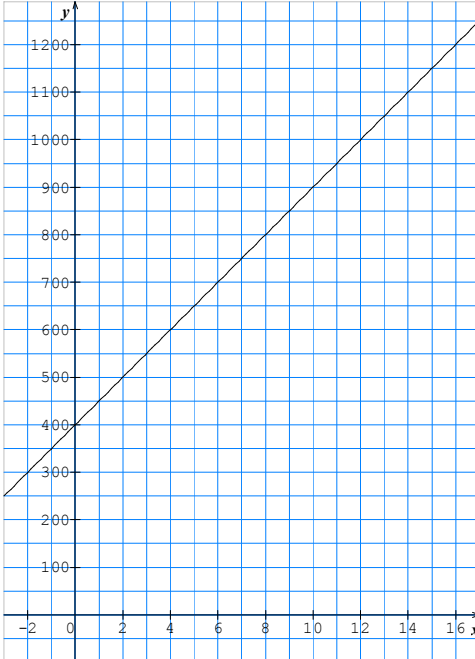
أنظر الرسم المرفق.

من خلال قراءة بيانية فعدد المحافظ التي يجب إنجازها حتى تكون أجرته 1200 DA هو 16 محفظة.

القسم الثاني

$$. \frac{16 \times 75}{100} = 12 \text{ عدد المحافظ المنجزة في هذا الأسبوع هو } 12$$

$$. 12 \times 50 + 400 = 1000 DA \text{ أجرته في هذا الأسبوع هي } 1000 DA$$



# امتحان شهادة التعليم المتوسط

المدّة: ساعتان

دورة جوان 2007

**الجزء الأول: ( 12 نقطة )**

**التمرين الأول: ( 03 نقط )**

$$\text{ليكن العدداً: } A = \sqrt{98} + 3\sqrt{32} - \sqrt{128} \text{ و } B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}$$

أكتب  $A$  على الشكل  $a\sqrt{2}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.

$$\text{بسط العدد } B \text{ ثم بين أن: } \frac{A^2}{33} - 3B = \frac{1}{3}$$

**التمرين الثاني: ( 03 نقط )**

لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:

$$E = 10^2 - (x - 2)^2 - (x + 8)$$

أنشر ثم بسط  $E$ .

حل العبارة  $10^2 - (x - 2)^2$ ، ثم استنتج تحليل العبارة  $E$ .

$$\text{حل المعادلة: } (11 - x)(8 + x) = 0$$

**التمرين الثالث: ( 02.5 نقط )**

$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 \\ 6x + 4y = 112 \end{cases} \quad \text{حل الجملة:}$$

اشترى رضوان من مكتبة أربعة كراريس و خمسة أقلام بمبلغ  $105 DA$

و اشترت مريم ثلاثة كراريس و قلمين بمبلغ  $56 DA$ .

أوجد ثمن الكراس الواحد و ثمن القلم الواحد.

**التمرين الرابع: ( 03.5 نقط )**

أرسم المثلث  $ABC$  القائم في  $A$  حيث:  $AB = 4,5cm$  و  $BC = 7,5cm$

أحسب  $AC$ .

لتكن النقطة  $E$  من  $[AB]$  حيث  $AB = 3AE$  و  $D$  نقطة من  $[AC]$  حيث

$$DC = \frac{2}{3}AC. \text{ عين على الشكل النقطتين } E, D.$$



بين أن  $(BC) \parallel (DE)$  ثم أحسب  $DE$ .

### الجزء الثاني: مسألة (08 نقط )

تقترح شركة لسيارات الأجرة التسعيرتين التاليتين:  
التسعيرة الأولى:  $15DA$  للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.  
التسعيرة الثانية:  $12DA$  للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها  $900DA$ .

انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله:

المسافة (Km)	60		
التسعيرة الأولى (DA)			5100
التسعيرة الثانية (DA)		3060	

ليكن  $x$  عدد الكيلومترات للمسافة المقطوعة.

$y_1$  هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.

$y_2$  هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.

عبر عن  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

حل المتراجحة  $15x > 12x + 900$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أ- مثل بيانيا الدالتين  $f$ ،  $g$  حيث:  $f(x) = 15x$  و  $g(x) = 12x + 900$

(  $1cm$  على محور الفواصل يمثل  $50Km$ ،  $1cm$  على محور الترتيب يمثل  $500DA$  )

ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

الجزء الأول: ( 12 نقطة )

التمرين الأول: ( 03 نقط )

$$B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad A = \sqrt{98} + 3\sqrt{32} - \sqrt{128}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{49 \times 2} + 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{64 \times 2} \\ &= 7\sqrt{2} + 3 \times 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= (7 + 12 - 8)\sqrt{2} \\ &= 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

و بالتالي  $A = 11\sqrt{2}$

$$B = \frac{3}{2} + \frac{10}{12} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} + \frac{5}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{A^2}{33} - 3B = \frac{(11\sqrt{2})^2}{33} - 3 \times \frac{7}{3} = \frac{11 \times 11 \times 2}{33} - \frac{21}{3} = \frac{11 \times 2}{3} - \frac{21}{3} = \frac{22}{3} - \frac{21}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{A^2}{33} - 3B = \frac{1}{3} \quad \text{و منه}$$

التمرين الثاني: ( 03 نقط )

لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:  $E = 10^2 - (x - 2)^2 - (x + 8)$

$$E = 100 - (x^2 - 4x + 4) - (x + 8) = 100 - x^2 + 4x - 4 - x - 8$$

$$E = -x^2 + 3x + 88 \quad \text{و منه}$$

لدينا:

$$10^2 - (x - 2)^2 = [10 - (x - 2)][10 + (x - 2)] = (10 - x + 2)(10 + x - 2)$$

$$10^2 - (x - 2)^2 = (12 - x)(8 + x) \quad \text{و منه}$$

$$E = (12 - x)(8 + x) - (x + 8) = (8 + x)(12 - x - 1) \quad \text{لدينا:}$$

$$E = (8+x)(11-x) \quad \text{و منه}$$

$$8+x = 0 \quad \text{أو} \quad 11-x = 0 \quad \text{يعني} \quad (11-x)(8+x) = 0$$

$$x = -8 \quad \text{أو} \quad x = 11 \quad \text{أي}$$

للمعادلة حلان هما: 11 و -8 .

### التمرين الثالث: (02.5 نقط)

نلاحظ أنه بالإمكان تبسيط المعادلة الثانية من الجملة للحصول على الجملة

$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 & (1) \\ 3x + 2y = 56 & (2) \end{cases}$$

لحل هذه الجملة يمكن استعمال طريقة الحل بالجمع أو طريقة الحل بالتعويض.

طريقة الحل بالجمع:

نضرب المعادلة (1) في (-2) و نضرب المعادلة (2) في 5 لنحصل هكذا على

$$\begin{cases} -8x - 10y = -210 & (1') \\ 15x + 10y = 280 & (2') \end{cases} \quad \text{الجملة:}$$

و بجمع المعادلتين (1') و (2') طرف لطرف نحصل

على المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية:  $7x = 70$  أي  $x = 10$ .  
بتعويض  $x$  بـ 10 في إحدى معادلتنا الجملة، مثلاً في (1)، نحصل على المعادلة ذات

المجهول  $y$  التالية:  $40 + 5y = 105$  أي  $5y = 65$  و منه  $y = 15$ .

إذن للجملة حل وحيد هو  $(x; y) = (10; 15)$ .

ملاحظة: بالطبع نحصل على نفس الحل بإتباع طريقة الحل بالتعويض.

لنرمز بـ  $x$  (DA) إلى ثمن الكرسي الواحد و بـ  $y$  (DA) إلى ثمن القلم الواحد

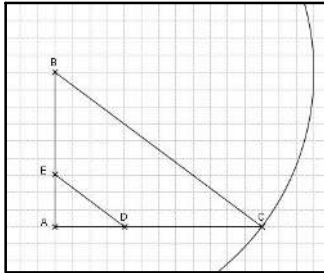
$$\begin{cases} 4x + 5y = 105 \\ 3x + 2y = 56 \end{cases} \quad \text{لدينا إذن:}$$

و بالتالي حسب السؤال الأول لدينا:  $x = 10$  و  $y = 15$ .

إذن ثمن الكرسي الواحد هو 10DA و ثمن القلم الواحد هو 15DA.

### التمرين الرابع: (03.5 نقط)

أنظر الشكل المقابل



حساب AC:

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  ومنه  $AC^2 = BC^2 - AB^2$  إذن  $AC^2 = (7,5)^2 - (4,5)^2 = 36$  أي  $AC = 6$   
أنظر الشكل أعلاه.

لدينا:  $AB = 3AE$  و منه  $AE = \frac{1}{3}AB$  و بما أن  $AB = 4,5cm$  فإن

$AE = 1,5cm$ . كما أن  $DC = \frac{2}{3}AC$  و بما أن  $AC = 6cm$  فإن  $DC = 4cm$ .

علما أن  $AD = AC - DC$  فإن  $AD = 2cm$ .

لدينا من جهة  $\frac{AC}{AD} = \frac{6}{2} = 3$  و لدينا من جهة ثانية  $\frac{AB}{AE} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} = 3$

أي أن  $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$  و منه حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيثاغورس لدينا:

$$(BC) \parallel (DE)$$

حساب DE.

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس يكون لدينا:  $\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE}$  و منه  $\frac{BC}{DE} = 3$

أي  $DE = \frac{BC}{3} = \frac{7,5}{3} = 2,5$  إذن  $DE = 2,5cm$

ملاحظة: كان بالإمكان تطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث ADE القائم في النقطة A.

## الجزء الثاني: مسألة (08 نقط )

المسافة (Km)	60	180	340
التسعيرة الأولى (DA)	900	2700	5100
التسعيرة الثانية (DA)	1620	3060	4980

لدينا  $y_1 = 15x$  و  $y_2 = 12x + 900$

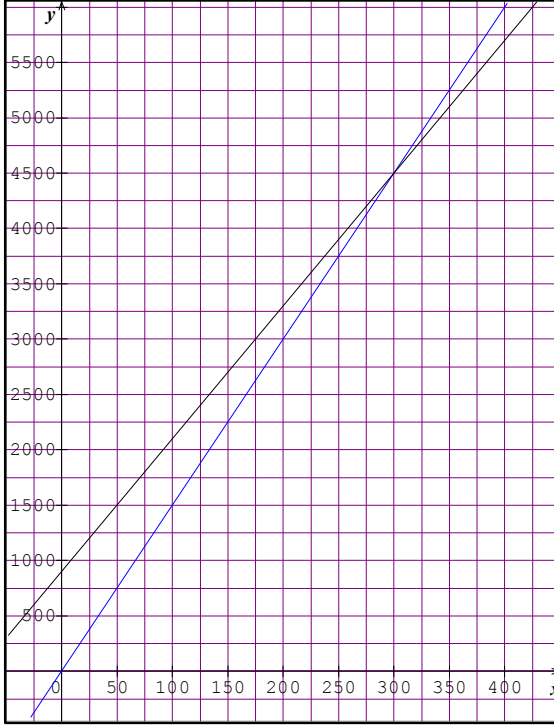
$15x > 12x + 900$  يعني  $15x - 12x > 900$  أي  $3x > 900$

و منه  $x > 300$ .

إذن كل قيم  $x$  الأكبر من 300 هي حلول المتراحة  $15x > 12x + 900$ .

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

ا- التمثيل البياني للدالتين  $f$ ،  $g$  حيث:  $f(x) = 15x$  و  $g(x) = 12x + 900$   
يكفي تحديد نقطتين من كل مستقيم لرسمه.



ب- نلاحظ أنه كلما كان عدد الكيلومترات أصغر من 300 يكون التمثيل البياني للدالة  $f$  ( الملون بالأزرق ) أسفل التمثيل البياني للدالة  $g$  و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الأولى بينما كلما كان عدد الكيلومترات أكبر من 300 يكون التمثيل البياني للدالة  $g$  ( الملون بالأسود ) أسفل التمثيل البياني للدالة  $f$  و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الثانية.  
أما في حالة 300 Km فتكون التسعيرتان متساويتين.