مستوى : رابعة متوسط | دارالشيوخ / ولاية الجلفة | إعداد الأستاذ : جيوخ العربي

موضوع مقترح رقم (04) في مادة الرياضيات لشهادة التعليم المتوسط 1442.

◄ ثق بالله وحاول. ◄ تاريخ اجتياز الامتحان : الأحد 25 شوال 1442

الجزء الأوّل : (12 نقطة)

التمرين الأوّل : (03 نقاط)

⊡ نعتبر العددان الحقيقيان $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ المعرّفان كما يلي : $\mathcal{A}=\dfrac{10^6\times 7\times (10^{-2})^{-3}\times 8}{(2\times 5)^{12}}$ و $\mathcal{B}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

1. أعط الكتابة العلمية للعدد $\mathcal{A}$.
2. بيّن أنّ $\sqrt{\mathcal{B}}$ عدد طبيعي غير معدوم.
3. أكتب $\dfrac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين الثاني : (03 نقاط)

⊡ نعتبر العبارتين الجبريّتين $\mathcal{H}$ و $\mathcal{S}$ المعرّفتين بالصيغة التالية : $\mathcal{H}=(2x-1)^2-9x^2$ و $\mathcal{S}=-5x^2-4x+1-(x+1)(6x-1)$.

1. أنشر وبسّط العبارة $\mathcal{H}$.
2. أ- حلّل العبارة $\mathcal{H}$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

ب- حسب ما فات، استنتج تحليلاً للعبارة $\mathcal{S}$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3. حل المعادلة التالية : $(-x-1)(11x-2)=0$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

☜ الهدف من هذا التمرين هو أن نحسب القيّم المضبوطة للنسب المثلثية لزاوية حادة قيسها $15°$. ☜

⊡ $\mathcal{ACDE}$ مربع طول ضلعه $2cm$.

1. أنشئ المثلث $\mathcal{ABC}$ متساوي الأضلاع داخل المربع $\mathcal{ACDE}$.
2. برهن أنّ المثلث $\mathcal{ABE}$ متقايس الساقين.
3. بيّن أنّ : $\widehat{\mathcal{BED}}=15°$.

⊡ $\mathcal{H}$ المسقط العمودي للنقطة $\mathcal{B}$ على المستقيم $(\mathcal{ED})$.

4. أوجد القيمة المضبوطة للطولين التاليين : $\mathcal{BH}$ و $\mathcal{EB}$.
5. بيّن أنّ : $cos\,(15°)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ و $tan\,(15°)=2-\sqrt{3}$.
6. استنتج القيمة المضبوطة لـ $sin\,(15°)$.

التمرين الرابع : (02 نقاط)

⊡ المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(\mathcal{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقط : $\mathcal{A}(1;-1)$ ، $\mathcal{B}(3;1)$ ، $\mathcal{C}(2;y)$ و $\mathcal{D}(x;-3)$.

1. عيّن كل من x و y بحيث يكون الرباعي $\mathcal{ABCD}$ متوازي أضلاع.
2. أحسب مساحة مربع إذا علمت أنّ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ هما رأسان متتاليان له.

الجزء الثاني : (08 نقاط)

⊡ لدى عمي عُمَيْر مزرعة خاصة لتربية الأغنام والأبقار.

. إذا كان ضعف مجموع عدد رؤوس الأغنام والأبقار هو 400 وفرق عدديهما هو 50 (عدد الأغنام أكبر من عدد الأبقار).

1. ما هو عدد رؤوس الغنم والأبقار؟.

2. سأل عمي عُمَيْر ابنه رضا الذي يدرس في السنة الرابعة متوسط أن يقترح عليه طريقة تسمح له بتقسيم الغنم والأبقار إلى مجموعات لها نفس العدد. فأقترح عليه أن يقسم كل عدد منها على العدد 25. برّر جواب رضا؟.

3. ما هو عدد مجموعات الغنم والأبقار؟.

4. قام عمي عُمَيْر ببيع هذه الأغنام والأبقار فقبض مبلغ قدره $1,875 \times 10^7 DA$. إذا كانت فائدة عمي عُمَيْر هي 20% من هذا المبلغ. أُحسب هذه الفائدة.

تنويه : تم إعداد هذا الملف لفائدة أحبابنا في الله بدون مقابل، يرجى عدم استخدام الملف لأغراض تجارية أوْ ربحية.

الرياضيات
الأستاذ جيوخ العربي
متوسطة زرقاوي غانم - حاسي فدول

التصحيح التفصيلي لموضوع (04) من مقترحات الرياضيات لشهادة التعليم المتوسط 1442.

حل التمرين الأوّل (03 نقاط)

1. إعطاء كتابة علمية للعدد $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \frac{10^6 \times 7 \times (10^{-2})^{-3} \times 8}{(2 \times 5)^{12}}$$
$$\mathcal{A} = \frac{10^6 \times 10^{-2\times(-3)} \times 7 \times 8}{10^{12}}$$
$$\mathcal{A} = \frac{10^{6+6} \times 56}{10^{12}}$$
$$\mathcal{A} = \frac{10^{12} \times 56}{10^{12}}$$
$$\mathcal{A} = 56$$
$$\mathcal{A} = 5,6 \times 10^1$$

2. تبيّن أنّ $\mathcal{B}$ عدد طبيعي غير معدوم :

لدينا :

$$\mathcal{B} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$
$$\mathcal{B} = \frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} + \frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$
$$\mathcal{B} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} + \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}$$
$$\mathcal{B} = \frac{12-6\sqrt{3}+12+6\sqrt{3}}{6}$$
$$\mathcal{B} = \frac{24}{6}$$
$$\mathcal{B} = 4$$

بما أنّ $\mathcal{B} = 4$ فإنّ $\sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{4}$ إذن : $\sqrt{\mathcal{B}} = 2$.

3. كتابة $\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال :

لدينا : $\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{8}{56}$ ولدينا أيضاً : $pgcd(56;8) = 8$.

ومنه :

$$\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{8 \div 8}{56 \div 8} = \frac{1}{7}$$

إذن :

$$\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{1}{7}$$

حل التمرين الثاني (03 نقاط)

1. نشر وتبسيط العبارة $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = (2x-1)^2 - 9x^2$$
$$\mathcal{H} = (2x)^2 - 2(2x) + 1^2 - 9x^2$$
$$\mathcal{H} = 4x^2 - 4x + 1 - 9x^2$$
$$\mathcal{H} = -5x^2 - 4x + 1$$

2.أ- تحليل $\mathcal{H}$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :

لدينا :

$$\mathcal{H} = (2x-1)^2 - 9x^2$$
$$\mathcal{H} = (2x-1)^2 - (3x)^2$$
$$\mathcal{H} = (2x-1-3x)(2x-1+3x)$$
$$\mathcal{H} = (-x-1)(5x-1)$$

ب- استنتاج تحليلا للعبارة $\mathcal{S}$ إلى جداءعاملين من الدرجة الأولى :

$$\mathcal{S} = -5x^2 - 4x + 1 - (x+1)(6x-1)$$
$$\mathcal{S} = (2x-1)^2 - 9x^2 - (x+1)(6x-1)$$
$$\mathcal{S} = (-x-1)(5x-1) - (x+1)(6x-1)$$
$$\mathcal{S} = (-x-1)(5x-1+6x-1)$$
$$\mathcal{S} = (-x-1)(11x-2)$$

3. حل المعادلة التالية : $(-x-1)(11x-2) = 0$:

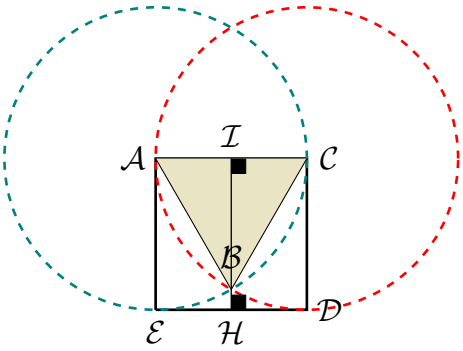
لدينا : $(-x-1)(11x-2) = 0$ ومنه : $-x-1 = 0$ أوْ $11x-2 = 0$، وبالتالي : $x = -1$ أوْ $x = \frac{2}{11}$.

ومنه للمعادلة $(-x-1)(11x-2) = 0$ حلان وهما : -1 و $\frac{2}{11}$.

حل التمرين الثالث : (03 نقاط)

1. إنشاء المثلث ABE متساوي الأضلاع داخل المربع $ACDE$:

الرياضيات - متوسطة زرقاوي غانم - جامي وزار - الأستاذ جيوخ العربي



2. برهان أنّ المثلث $\mathcal{ABE}$ متقايس الساقيْن :

واضح أنّ : $\mathcal{AB} = \mathcal{AE}$ ومنه : $\mathcal{ABE}$ مثلث متقايس الساقيْن.

3. إثبات أنّ $\widehat{\mathcal{BED}} = 15°$:

بما أنّ $\mathcal{ABC}$ متساوي الأضلاع

فإنّ : $\widehat{\mathcal{BAC}} = \widehat{\mathcal{ACB}} = \widehat{\mathcal{CBA}} = 60°$ هذا من جهة أولى.

ومن جهة ثانية، لدينا : $\widehat{\mathcal{EAC}} = 90°$ وعليه : $\widehat{\mathcal{EAB}} = 30°$.

ومن جهة أخرى، لدينا $\mathcal{ABE}$ مثلث متقايس الساقيْن

ومنه : $\widehat{\mathcal{BEA}} = \widehat{\mathcal{ABE}}$. وعليه، نجد : $\widehat{\mathcal{BEA}} = 75°$.

إذن : $\widehat{\mathcal{BED}} = 90° - \widehat{\mathcal{BEA}} = 90° - 75° = 15°$.

4. إيجاد القيمة المضبوطة للطولين $\mathcal{BH}$ و $\mathcal{EB}$:

• $\mathcal{CIH}$ قائم في $\mathcal{I}$ ومنه : $sin(\widehat{\mathcal{C}}) = \dfrac{\mathcal{IH}}{\mathcal{CH}}$.

وبالتالي : $sin(60°) = \dfrac{\mathcal{IH}}{2}$ ومنه : $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathcal{IH}}{2}$.

وهذا يوحي لنا أنّ : $\mathcal{IH} = \sqrt{3}cm$ هذا من ناحية أولى.

ومن ناحية ثانية، لدينا : $\mathcal{BH} = \mathcal{IH} - \mathcal{IB}$

إذن : $\mathcal{BH} = 2 - \sqrt{3}cm$.

• $\mathcal{EBH}$ مثلث قائم في $\mathcal{H}$ حسب خاصية فيتاغورس المباشرة، نجد :

$$\mathcal{EB}^2 = \mathcal{EH}^2 + \mathcal{HB}^2$$
$$\mathcal{EB}^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2$$
$$\mathcal{EB}^2 = 1 + 2^2 - 2\times 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$
$$\mathcal{EB}^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3$$
$$\mathcal{EB}^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$
$$\mathcal{EB}^2 = 4(2-\sqrt{3})$$
$$\mathcal{EB} = \sqrt{4(2-\sqrt{3})}$$
$$\mathcal{EB} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

إذن : $\mathcal{EB} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}cm$.

5. إثبات أنّ : $cos\,(15°) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$:

• $\mathcal{EBH}$ مثلث قائم في $\mathcal{H}$. ومنه : $cos(\widehat{\mathcal{E}}) = \dfrac{\mathcal{EH}}{\mathcal{EB}}$.

ومنه :

$$cos\,(15°) = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$
$$cos\,(15°) = \frac{1\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\,(2-\sqrt{3})}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})}{2\,(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}{2\left(2^2-(\sqrt{3})^2\right)}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})^2}}{2\,(4-3)}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})\left(2^2+2\times 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\right)}}{2}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})\,(7+4\sqrt{3})}}{2}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2\times 7+2\times 4\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 7-\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}}}{2}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{14+8\sqrt{3}-7\sqrt{3}-12}}{2}$$
$$cos\,(15°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

إثبات أنّ : $tan\,(15°) = 2-\sqrt{3}$:

• $\mathcal{EBH}$ مثلث قائم في $\mathcal{H}$. ومنه : $tan(\widehat{\mathcal{E}}) = \dfrac{\mathcal{BH}}{\mathcal{EH}}$.

$tan\,(15°) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$.

6. استنتاج القيمة المضبوطة لـ $sin\,(15°)$:

نعلم أنّ : $tan(\widehat{\mathcal{E}}) = \dfrac{sin(\widehat{\mathcal{E}})}{cos(\widehat{\mathcal{E}})}$

وعليه : $sin(\widehat{\mathcal{E}}) = tan(\widehat{\mathcal{E}}) \times cos(\widehat{\mathcal{E}})$.

الرياضيات
متوسطة زرقاوي غانم - حاسي فدول
الأستاذ جيوخ العربي

وبالتالي : $sin(\widehat{\mathcal{E}}) = (2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$

إذن : $sin(\widehat{\mathcal{E}}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

حل التمرين الرابع : (03 نقاط)

1. تعيّن كل من x و y حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع. يعني أنّ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3-1;1-(-1))$ ومنه : $\overrightarrow{AB}(2;2)$.

لدينا : $\overrightarrow{DC}(2-x;y-(-3))$ ومنه : $\overrightarrow{DC}(2-x;y+3)$.

إذن : $\begin{vmatrix} 2-x=2 \\ y+3=2 \end{vmatrix}$ وعليه : $\begin{vmatrix} x=0 \\ y=-1 \end{vmatrix}$.

2. حساب مساحة مربع حيث A و B رأسان متتاليان :

في الحقيقة، لدينا : $\mathcal{S} = AB^2$. ولما كان : $AB = \sqrt{2^2+2^2}$

ومنه : $AB = \sqrt{4+4}$ وبالتالي : $AB = \sqrt{8}$.

إذن : $\mathcal{S} = \sqrt{8}^2 = 8ua$.[1]

الجزء الثاني : (08 نقاط)

1. إيجاد عدد رؤوس الغنم والأبقار :

سنرمز لعدد رؤوس الأغنام بـ : x و y لعدد رؤوس الأبقار.

تظهر جلياً الجملة التالية التي تعبّر عن مضمون نص المسألة.

$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2(x+y) = 400 \\ x-y = 50 \end{cases}$. ومنه، نجد : $\begin{cases} x+y = 200 \\ x-y = 50 \end{cases}$.

بعد أنْ نتأمل قليلاً في الجملة $(\mathcal{S})$، نجد : $2x = 250$

وهذا ما يستلزم أنّ : $x = 125$ نعوّض هذا الأخير في الجملة $(\mathcal{S})$ فنجد : $y = 75$.

وأخيراً، نجد : عدد رؤوس الأغنام 125 رأساً.

وعدد رؤوس الأبْقار 75 رأساً.

2. تبرير جواب رضا :

عندما نريد تقسيم الغنم والأبقار إلى مجموعات لها نفس العدد، فهذا ما يوحي لنا حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 125 و 75. لهذا نستعمل خوارزمية إقليدس :

$$\begin{vmatrix} 125 = 75 \times 1 + 50 \\ 75 = 50 \times 1 + 25 \\ 50 = 25 \times 2 + 0 \end{vmatrix}$$

إذن، القاسم المشترك الأكبر للعددين 125 و 75 هو : 25.

بهذا نكون قدْ برّرنا جواب رضا.

3. عدد مجموعات الغنم والأبقار :

• حساب عدد مجموعات الغنم :

لدينا : $\frac{125}{25} = 5$ إذن، يمكن إنشاء خمس مجموعات تتكوّن من 25 رأساً من الغنم.

• حساب عدد مجموعات الأبقار :

لدينا : $\frac{75}{25} = 3$ إذن، يمكن إنشاء ثلاث مجموعات تتكوّن من 25 رأساً من الأبْقار.

4. حساب مبلغ هاته الفائدة :

نضع α : مبلغ هاته الفائدة. نرى مباشرة أنّ :

$$1,875 \times 10^7 \longrightarrow 100\%$$

$$\alpha \longrightarrow 20\%$$

وبالتالي : $\alpha = \frac{20\% \times 1,875 \times 10^7}{100\%}$.

إذن : $\alpha = 3,75 \times 10^6$.

وأخيراً مبلغ هاته الفائدة : $3,75 \times 10^6$ دينار جزائري.

الرياضيات متوسطة * متوسطة الأستاذ جيوخ العربي * علي غانم - حاسي فدول

*** موفقون -بإذن الله- في شهادة التعليم المتوسط ***
*** لا تنسونا بالدعـــاء ***
*** دمتم في رعاية الله وحفظه ***

[1] ua : وحدة المساحات.